Cálculo numérico (Ingeniería Industrial)

28 Enero 2009 Primera convocatoria

Ejercicio 1

Se pretende resolver el sistema lineal $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Obtener los valores de α para que la matriz A sea diagonal dominante. *(0.5 puntos)*

b) Estudiar para qué valores de α se puede obtener la factorización de Cholesky de la matriz A. *(0.5 puntos)*

c) Determinar los valores de α para que los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel sean convergentes. *(1 punto)*

Ejercicio 2. Cuestión Práctica

Se pretende resolver la ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde

$$f(x) = 2\,x + 8 - \sqrt{2\,x^2 - 1}.$$

a) Sin resolver la ecuación $f(x) = 0$, demostrar que tiene una única solución en el intervalo $[-4, -1]$. *(0.5 puntos)*

b) Para encontrar esta solución se propone el siguiente método iterativo

$$\begin{cases} x_0 = -3, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2\,x_n^2 - 1}}{2} - 4, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

¿Se puede asegurar la convergencia del método iterativo al punto fijo $x^* = -2.38751392$?. Si se parte del punto inicial $x_0 = 2.387514$ ¿se puede asegurar la convergencia del método iterativo al punto fijo x^*?. *(1 punto)*

c) Calcular 4 iteraciones con el método iterativo anterior partiendo del punto inicial $x_0 = 2.387514$. ¿Se observa convergencia al punto fijo x^*?. *(0.5 puntos)*

Ejercicio 3

Se pretende calcular los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 4 & -34/5 & 12/5 \\ 3 & 12/5 & -41/5 \end{pmatrix}.$$

a) Utilizando una matriz de Householder H_1, transformar la matriz A en otra matriz semejante $B = H_1 A H_1$ que sea tridiagonal. ¿Qué relación hay entre los valores propios de A y B?. *(1 punto)*

b) Utilizando el método de Jacobi, diagonalizar la nueva matriz B y determinar sus valores propios y vectores propios. Con los cálculos que has realizado hasta el momento, determina los valores propios y vectores propios de la matriz de partida A. *(1.25 puntos)*

c) Partiendo del vector inicial $x_0 = (0, 1, 1)^T$, calcular 3 iteraciones con el método de la potencia para matrices simétricas y obtener una aproximación del valor propio dominante de A. ¿Explica razonadamente por qué converge tan rápido?. *(0.75 puntos)*

Ejercicio 4

Se considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq b_1\,f(\gamma) + b_2\,f(1-\gamma).$$

a) Utilizando el polinomio que interpola a $f(x)$ en los nodos $x_0 = \gamma$ y $x_1 = 1-\gamma$, determinar los pesos b_1 y b_2 de la fórmula de cuadratura. A continuación, determinar el valor del parámetro γ para que tenga grado de precisión al menos 3. *(1 punto)*

b) Utilizando los nodos y pesos determinados en el apartado a) se pretende construir un método Runge–Kutta de 2 etapas definido por la tabla de coeficientes

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & a_{11} & 0 \\ 1-\gamma & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Determinar los coeficientes a_{11}, a_{21} y a_{22} para que el método tenga orden al menos 3. Escribir las ecuaciones del método Runge–Kutta obtenido e indicar de que tipo es (explícito, implícito, etc.). *(1 punto)*

c) Utilizando el método de orden 3 (RK3) determinado en b) e introduciendo una etapa adicional se pretende construir un par encajado de ordenes 3 y 2 (RK3(2)) definido por la tabla de coeficientes

$$\begin{array}{c|ccc} \gamma & a_{11} & 0 & 0 \\ 1-\gamma & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \\ \hline & b_1^* & 0 & b_3^* \end{array}$$

Determinar los nuevos pesos b_1^* y b_3^* para que esto sea posible. Escribir las ecuaciones de ambos métodos y la forma de estimar el error. *(1 punto)*

Sist. Lineales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} 1 > |\alpha| \\ 2 > 1 + |\alpha| \Rightarrow |\alpha| < 1 \\ 2 > 1 \quad \text{o.k.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Diagonal domi}^{te} \text{ si } |\alpha| < 1$$

$$-1 < \alpha < 1$$

b)
$$|1| = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2 > 0 \Rightarrow |\alpha| < \sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 1 - 2\alpha^2 > 0 \Rightarrow 3 - 2\alpha^2 > 0 \Rightarrow |\alpha| < \sqrt{3/2}$$

Definida positiva si $|\alpha| < \sqrt{3/2} \Leftrightarrow -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}$

c)
$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left[\lambda^2 - \left(\frac{1+2\alpha^2}{4}\right)\right] = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm \dfrac{\sqrt{1+2\alpha^2}}{2} \end{cases}$$

$$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{1+2\alpha^2}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+2\alpha^2} < 2 \Leftrightarrow 1 + 2\alpha^2 < 4 \Leftrightarrow \alpha^2 < 3/2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3/2} \Leftrightarrow -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}$$

A tridiagonal $\Rightarrow \rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 = \dfrac{1+2\alpha^2}{4} < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < 3/2$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3/2} \Leftrightarrow -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}$$

otra forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1/2 & 0 \\ \frac{\alpha}{4} & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{2} & -1/2 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{4} & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B_{GS}) = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\alpha^2}{2} & 1/2 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{4} & \lambda - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda - \frac{1+2\alpha^2}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ doble} \\ \lambda_2 = \dfrac{1+2\alpha^2}{4} \end{cases}$$

$$\rho(B_{GS}) = \frac{1+2\alpha^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3/2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3/2} \quad \alpha < \sqrt{3/2}$$

Sist. no lineales

a) $f(x) = 2x + 8 - \sqrt{2x^2 - 1}$ cont^{a} en $[-4,-1]$

$f(-4) = -\sqrt{31} < 0$

$f(-1) = 5 > 0$

$\Bigg\} \rightarrow \exists$ solución

$f'(x) = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}} > 0 \quad \forall x \in [-4,-1] \rightarrow f(x) \uparrow$ en $[-4,-1]$

La solución x^* es única

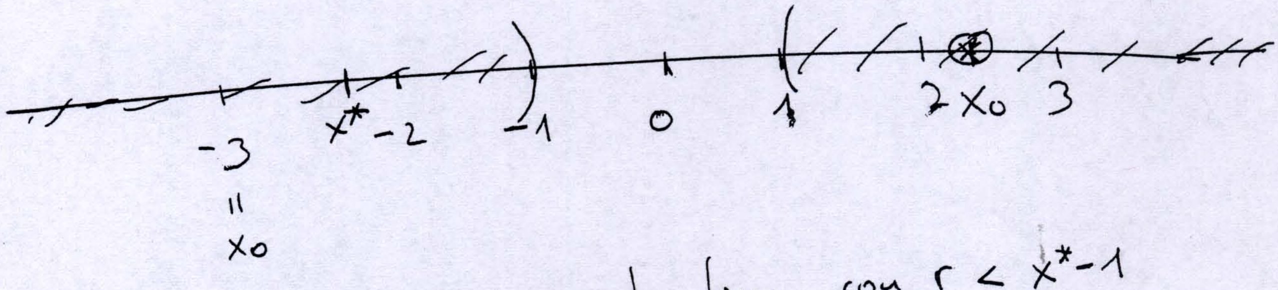
b)

$g(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{2} - 4$

$g'(x) = \dfrac{1}{\cancel{2}} \dfrac{\cancel{4}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}$

$|g'(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{2x^2-1}} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2x^2-1} \Leftrightarrow x^2 < 2x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^2 > 1 \begin{cases} x > 1 \\ y \\ x < -1 \end{cases}$ R. de Contr. $= (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$



i) $\exists\ D(x^*, r)$ donde $g(x)$ contractiva con $r < x^* - 1$

ii) Si $x_0 = -3 \in D(x^*, r)$ con $r = 3 - x^*$

$\rightarrow$ converge a x^*

iii) Si $x_0 = 2.387514 \notin D(x^*, r)$ con $r < x^* - 1$

$\rightarrow$ En este caso no se puede asegurar NADA

c) $x_0 = 2.387514$

$x_1 = g(x_0) = -2.38751386$

$x_2 = g(x_1) = -2.38751396$

$x_3 = g(x_2) = -2.38751388$

$x_4 = g(x_3) = -2.38751394$

Se observa convergencia a $x^* = -2.38751392$.

Val y Vect. propios

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ \boxed{4} & -34/5 & 12/5 \\ \boxed{3} & 12/5 & -41/5 \end{pmatrix}$$

a) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|x\|_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$$v = x + \|x\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H_1^* = I_2 - \frac{2}{\|v\|_2^2} v \cdot v^T = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{H_1^*} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$B = H_1 A H_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 4 & -34/5 & 12/5 \\ 3 & 12/5 & -41/5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

A y B son semejantes y tienen los mismos v.p.

b) anular a_{12}, $p=1$, $q=2$

$$\beta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 a_{12}} = 0$$

$$t = \beta \pm \sqrt{1+\beta^2} = + 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = G_1^T B G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

v.p. $\begin{cases} \lambda_2 = 0 \text{ simple} \\ \lambda_1 = -10 \text{ doble} \end{cases}$ ~~vect. prop. = las columnas de G_1~~

$$D = G_1^T B G_1 = G_1^T H_1 A H_1 G_1 = (H_1 G_1)^T A (H_1 G_1)$$

$$= P^T A P \quad \text{con } P = H_1 G_1$$

A y D son semejantes y tienen los mismos v.p.

Los vect. prop. de A son las columnas de

$$\underline{P} = H_1 G_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & -3/5 \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} & -3/5\sqrt{2} & 4/5 \end{pmatrix}$$

c) $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 = A x_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -22/5 \\ -29/5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{x_1^T x_0}{x_0^T x_0} = -\frac{51}{10} = -5.1$$

$$x_2 = A x_1 = \begin{pmatrix} -70 \\ 44 \\ 58 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{x_2^T x_1}{x_1^T x_1} = -10$$

$$x_3 = A x_2 = \begin{pmatrix} 700 \\ -440 \\ -580 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{x_3^T x_2}{x_2^T x_2} = -10$$

Velocidad de convergencia:

$$\sigma_{n+1} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n\right)$$

$$\text{velocidad} \doteq O\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n\right) = O\left(\left(\frac{10}{0}\right)^n\right) = 0 \text{ si } n \geq 1$$

F. Cuadratura y RK

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq b_1 f(\gamma) + b_2 f(1-\gamma)$$

a)

x_i	$f(x_i)$	
$x_0 = \gamma$	$f(\gamma)$	$\dfrac{f(1-\gamma)-f(\gamma)}{1-2\gamma}$
$x_1 = 1-\gamma$	$f(1-\gamma)$	

$$P_1(x) = f(\gamma) + \frac{f(1-\gamma)-f(\gamma)}{1-2\gamma}(x-\gamma)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \int_0^1 P_1(x)\,dx = f(\gamma)\,x\Big]_0^1 + \frac{f(1-\gamma)-f(\gamma)}{1-2\gamma}\frac{(x-\gamma)^2}{2}$$

$$= f(\gamma) + \frac{f(1-\gamma)-f(\gamma)}{\cancel{1-2\gamma}}\,\frac{\cancel{1-2\gamma}}{2} = \frac{1}{2}f(\gamma) + \frac{1}{2}f(1-\gamma)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad y \quad b_2 = \frac{1}{2}$$

Tiene grado de precisión al menos 1 y es exacta para $f(x) = 1, x$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma^3 + \frac{1}{2}(1-\gamma)^3 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \quad (2)$$

de (1) $\rightarrow \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0}$

$$\left[\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1-4/6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1/3}}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/12}}\right.$$

de (2) $\rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\gamma^3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\cancel{\gamma^3} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0}$$

b)

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & a_{11} & 0 \\ 1-\gamma & a_{21} & a_{22} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

orden 3: $\quad Ae = c \rightarrow \begin{cases} \boxed{a_{11} = \gamma} \\ \underline{a_{21} + a_{22} = 1-\gamma} \end{cases}$

$b^T e = 1 \quad$ o.k.

$b^T c = \frac{1}{2} \quad$ o.k

$b^T c^2 = \frac{1}{3} \quad$ o.k

$\cancel{b^T A c = \frac{1}{6} \Rightarrow \gamma^2 + a_{21} \ldots}$

$$b^T A c = (1/2, 1/2) \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma^2 + a_{21}\gamma + a_{22}(1-\gamma) = \frac{1}{3}}$$

como $\quad a_{21} = 1-\gamma-a_{22}$

$$\cancel{\gamma^2} + \gamma(1-\cancel{\gamma}) + a_{22}(1-2\gamma) = \frac{1}{3}$$

$$\gamma + a_{22}(1-2\gamma) = \frac{1}{3} \cancel{\Rightarrow a_{22} = \frac{\frac{1}{3}-\gamma}{1-2\gamma} = \frac{1-3\gamma}{3(1-2\gamma)}}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{1/12} + a_{22}\left(-2\sqrt{1/12}\right) = \frac{1}{3}$$

$$2\sqrt{1/12}\, a_{22} = \frac{1}{6} + \sqrt{1/12} \rightarrow a_{22} = \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2} = \gamma$$

$$\rightarrow a_{11} = 1-2\gamma$$

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \cancel{\gamma} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

<u>SDIRK</u>

$$\begin{cases} Y_1 = y_n + h\gamma f(t_1, Y_1) \\ Y_2 = y_n + h\left[(1-2\gamma) f(t_1, Y_1) + \gamma f(t_2, Y_2)\right] \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_1, Y_1) + f(t_2, Y_2)\right] \end{cases}$$

c)

$$
\begin{array}{c|ccc}
\gamma & \gamma & 0 & 0 \\
1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
\hline
 & b_1^* & 0 & b_3^*
\end{array}
$$

$1/2 \quad 1/2 \quad 0$ orden 3

$b_1^* \quad 0 \quad b_3^*$ orden 2

$$b^{*T} e = 1 \Rightarrow b_1^* + \cancel{b_3^*} = 1$$

$$b^{*T} c = \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(b_1^* \gamma + \cancel{b_3^*} = \frac{1}{2}\right)$$

$$b_1^*(1-\gamma) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b_1^* = \frac{1}{2(1-\gamma)}}$$

$$\boxed{b_3^* = 1 - b_1^* = \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}}$$

$$t_1 = t_n + \gamma h, \quad t_2 = t_n + (1-\gamma)h, \quad t_3 = t_n + h$$

etapas
$$
\begin{cases}
Y_1 = y_n + h\gamma f(t_1, Y_1) \\
Y_2 = y_n + h\left[(1-2\gamma) f(t_1, Y_1) + \gamma f(t_2, Y_2)\right] \\
Y_3 = y_n + h f(t_2, Y_2)
\end{cases}
$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_1, Y_1) + f(t_2, Y_2)\right]$$

$$y_{n+1}^* = y_n + h\left[b_1^* f(t_1, Y_1) + b_3^* f(t_3, Y_3)\right]$$

$$Est(h) = y_{n+1} - y_{n+1}^*$$