Cálculo Numérico (Ingeniería Informática)

7 de septiembre de 2006 Examen segunda convocatoria

Prueba de teoría y problemas (75%)

1. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, y $Ax = b$ el sistema de ecuaciones tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean B_G y B_J las matrices de iteración de los métodos de Gauss-Seidel y Jacobi respectivamente, aplicadas al sistema anterior.

(a) Hallar el radio espectral de B_J y deducir para qué valores de a converge. (1 punto)

(b) Probar que si $a \in (0, 4)$, la matriz B_G tiene dos valores propios complejos conjugados y uno real. Hallar el radio espectral de B_G. ¿Para qué valores de $a \in (0, 4)$ el método de Gauss-Seidel es convergente?.(1.5 puntos)

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene como valor propio de mayor módulo $\lambda_1 = 3$ y su vector propio asociado es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Utiliza el método de deflación de Wielandt para calcular el segundo valor propio y su vector propio asociado. Sin realizar ninguna operación mas, razona cual es el menor valor propio. (2.5 puntos)

3. (a) Hallar a_1 y a_2 para que la fórmula de derivación numérica

$$f'(x) \approx a_1 f(0) + a_2 f(1/2)$$

sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1. (1 punto)

(b) Determinar una fórmula de cuadratura con grado de precisión 3 de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x) w(x) dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(x_1),$$

siendo $w(x) = x$. (1.5 puntos)

Prueba de prácticas de laboratorio (25%)

4. Se desea calcular dos raices de la ecuación $x^3 - e^x + 3 = 0$. Para ello se quiere utilizar el método iterativo del punto fijo empezando a iterar en $x_0 = -1.4$ y en $x_0 = 4.6$. Para las siguientes funciones de iteración:

   - $g_1(x) = \ln(x^3 + 3)$,
   - $g_3(x) = x^3 - e^x + x + 3$,

   responde razonadamente si alguno de los puntos iniciales dados son adecuados y realiza dos iteraciones cuando sea posible asegurar la convergencia. (1.5 puntos)

5. Se pretende calcular una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el método de Newton.

   Para $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y $x_0 = 1.5$ hemos obtenido los siguientes resultados:

x_n	$e_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	e_{n+1}/e_n	e_{n+1}/e_n^2	e_{n+1}/e_n^3
$x_1 = 1.75$	0.25			
$x_2 = 1.875$	0.125			
$x_3 = 1.9375$	0.0625			
$x_4 = 1.96875$	0.03125			

   Completar la tabla y utilizar sus datos para averiguar el orden de convergencia que presenta el método de Newton. ¿A qué raíz converge? *(1 punto)*