

Prueba de teoría y problemas (75%)

1. Para resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} X = b,$$

se aplica el método iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^{k+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} X^k = b \text{ para } k = 0, 1, \dots$$

con α, β y γ parámetros reales.

- ¿Para qué valores de los parámetros este sistema lineal tiene una única solución?
 - Encontrar todos los valores de α, β y γ para los cuales el método iterativo es convergente.
 - Para $\alpha = \gamma = 0$ ¿puede encontrarse la solución a lo más en dos iteraciones?
2. Una empresa de transportes desea analizar el consumo de combustible dependiendo del peso transportado. Se han tomado diversos datos, que se encuentran recogidos en la siguiente tabla:

$x_i = \text{combustible (en litros)}$	5	6	7	8	9
$f(x_i) = \text{peso en Kg.}$	36.7	37.1	38.3	39.7	40.7

- Se desea interpolar los datos correspondientes al gasto entre 5 y 8 litros mediante un polinomio de grado 3. Calcularlo por dos formas diferentes.
 - Se se quiere añadir el dato correspondiente al gasto de 9 litros de combustible, ¿cuál sería la mejor forma de obtener el polinomio de interpolación de grado 4?. Calcularlo.
 - Usando los datos de entre 5 y 8 litros, obtener mediante interpolación inversa una aproximación del gasto de combustible para transportar 38 Kg.
3. Utilizando desarrollos de Taylor deducir el término del error para la fórmula:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}$$

Aplicar un paso del proceso de extrapolación de Richardson a esta aproximación para obtener una fórmula de orden 2 que aproxime a $f''(x)$.

Prueba de prácticas de laboratorio (25%)

4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & -3 \end{pmatrix}$$

la matriz del sistema $Ax = b$. Teniendo en cuenta el tema de valores propios, pero sin calcularlos:

- (a) ¿Se puede asegurar que existe una única solución del sistema lineal?
 - (b) ¿Es la matriz definida positiva?. ¿Son sus valores propios reales o puede haber alguno complejo?.
5. Se ha aplicado el método de **Newton** con una tolerancia de 0.3×10^{-9} y un número máximo de iteraciones igual a 100 para hallar las raíces del polinomio $p(x) = x^4 + x^2 - 6x + 2$. Partiendo de los puntos 0.5 y 1.5, el algoritmo se para en la quinta iteración, y se obtiene la tabla:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	0.3472222222	0.3572970310	0.3573315906	0.3573315910	0.3573315910
1.5	1.470238095	1.468923827	1.468921319	1.468921320	1.468921320

Explica el comportamiento del método en ambos casos.