Capítulo 3

Espacios vectoriales

3.1 Introducción

Definición 3.1.1 Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, es un grupo abeliano $(V, +)$ dotado de una operación externa con dominio de operadores en K

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \longrightarrow & V \\ (k, v) & \mapsto & k \cdot v \end{array}$$

que a cada par $(k, v) \in K \times V$ le asocia un elemento de V denotado por $k \cdot v$, o simplemente kv , que cumple las siguientes propiedades:

1. $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v \quad \forall k_1, k_2 \in K \,, v \in V$
2. $(k_1k_2)v = k_1(k_2v) \quad \forall k_1, k_2 \in K \,, v \in V$
3. $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2 \quad \forall k \in K \,, v_1, v_2 \in V$
4. $1_K v = v \quad \forall v \in V$.

Los elementos de K se denominan escalares y los de V vectores. La operación externa también suele llamarse producto por escalar. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, escribiremos abreviadamente que V es un K-e.v. En este curso trataremos exclusivamente con espacios vectoriales reales, es decir, $K = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.2 El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales

$$P_2(x) = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

con la suma de polinomios $(+)$ y el producto $(\cdot)$ por un escalar, es un espacio vectorial (ejercicio).

Ejemplo 3.1.3 El conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ con la suma $(+)$ de matrices y el producto $(\cdot)$ por un escalar tiene estructura de espacio vectorial (ejercicio).

Ejemplo 3.1.4 El conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

con la suma $(+)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \mapsto & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

y el producto $(\cdot)$ por un escalar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\alpha, \boldsymbol{x}) & \mapsto & \alpha\boldsymbol{x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ &\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

tiene estructura de espacio vectorial (ejercicio).

Definición 3.1.5 Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los números reales $x_1, \dots, x_n$ se llaman componentes del vector $\boldsymbol{x}$.

3.1.1 Propiedades de los espacios vectoriales

Las siguientes propiedades se deducen de la definición 3.1.1

(a) $0v = 0$

(b) $\lambda 0 = 0$

(c) $(-\lambda)v = -(\lambda v)$

(d) $\lambda(-v) = -(\lambda v)$

(e) $\lambda v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$ ó $v = 0$

(f) $\lambda v = \lambda w$ y $\lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad v = w$

(g) $\lambda v = \beta v$ y $v \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \beta$

Demostración

(a) $0v = (0+0)v \overset{1.}{=} 0v + 0v$ y sumando a ambos lados de la igualdad $-(0v)$ obtenemos $0v = 0$.

(b) $\lambda 0 = \lambda(0+0) \overset{3.}{=} \lambda 0 + \lambda 0$ y sumando a ambos lados de la igualdad $-(\lambda 0)$ obtenemos $\lambda 0 = 0$.

(c) Obsérvese que en esta propiedad estamos diciendo que el opuesto del vector λv es el vector $(-\lambda)v$. Por tanto tenemos que probar que $\lambda v + (-\lambda)v = 0$. En efecto $\lambda v + (-\lambda)v \overset{1.}{=} (\lambda - \lambda)v = 0v \overset{(a)}{=} 0$.

(d) Esta propiedad afirma que el opuesto de λv es $\lambda(-v)$. Así, hay que demostrar que $\lambda v + \lambda(-v) = 0$. En efecto $\lambda v + \lambda(-v) \overset{3.}{=} \lambda(v - v) = \lambda 0 \overset{(b)}{=} 0$.

(e) Si $\lambda 0 = 0$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\exists \lambda^{-1}$ y tenemos $\lambda^{-1}\lambda v \Rightarrow 1v = \lambda^{-1}0 \overset{4.,(b)}{\Rightarrow} v = 0$.

(f) Si $\lambda \neq 0$, entonces $\exists \lambda^{-1}$ y tenemos $\lambda^{-1}\lambda v = \lambda^{-1}\lambda w \overset{2.}{\Rightarrow} (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}\lambda w$ luego $1v = 1w$ y por 4. tenemos $v = w$.

(g) Sean $\lambda v = \beta v$, sumamos $-(\beta v)$ en ambos lados de la igualdad: $\lambda v + (-(\beta v)) = \beta v + (-(\beta v)) \overset{(c)}{\Rightarrow} \lambda v + (-\beta v) = 0$ y por 1. tenemos $(\lambda - \beta)v = 0$ y además $v \neq 0$, luego por (e) $\lambda - \beta = 0$.

3.2 Subespacios vectoriales

Definición 3.2.1 Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $W \subset V$ no vacío. Se dice que W es un subespacio vectorial de V si $(W, +, \cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial. Se denota $W \leq V$.

Proposición 3.2.2 *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W \subset V$ *no vacío, entonces*

$$W \leq V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a) & v + w \in W \quad \forall v, w \in W \\ b) & \lambda v \in W \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in W \end{cases}$$

Demostración Una implicación es obvia.
$\Leftarrow$) Sea $v \in W$, como $-1 \in \mathbb{R}$ tenemos $-v \in W$ y así también $0 \in W$. Veamos ahora que W satisface todas las propiedades para ser espacio vectorial. La operación $+$ es binaria interna por hipótesis. Las propiedades asociativa y conmutativa se tienen por tenerlas en V. Además hemos visto que existe elemento neutro en W y que se tiene la propiedad del elemento simétrico. La operación $\cdot$ es binaria externa con dominio de operadores en $\mathbb{R}$ por hipótesis. Las cuatro propiedades de la definición 3.1.1 se tienen por ser ciertas en V. $\square$

El resultado anterior tiene importancia desde el punto de vista práctico, pues para comprobar que un subconjunto W tiene estructura de espacio vectorial basta con comprobar que las restricciones de las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ al subconjunto W siguen siendo operaciones internas.

Ejemplo 3.2.3 Comprobar que el conjunto

$$W = \{(x, y, z) \mid x + 2y = z\} \subset \mathbb{R}^3$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Podemos expresar más cómodamente el conjunto W como:

$$W = \{(x, y, x + 2y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Sean $w_1, w_2 \in W$, veamos que $w_1 + w_2 \in W$. En efecto,

$$w_1 = (x_1, y_1, 2x_1 + y_1), \quad w_2 = (x_2, y_2, 2x_2 + y_2),$$

y así,

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) \in W.$$

Sean ahora $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos que $\lambda w \in W$. En efecto, $w = (x, y, 2x+y)$, luego $\lambda w = (\lambda x, \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) \in W$.

Ejercicio 3.2.4 Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son o no s. v. de $\mathbb{R}^3$.

1. $W_1 = \{(a, b, c) \mid a = b + c\}$

2. $W_2 = \{(a, b, c) \mid a = c + 2\}$

3. $W_3 = \{(a, b, 2)\}$

Proposición 3.2.5 *Si U y W son dos subespacios vectoriales de V, entonces $U \cap W$ y $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ son también subespacios vectoriales de V.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $U \cap W$ es subespacio vectorial de V. Para ello hacemos uso de la Proposición 3.2.2

a) Consideremos $u, v \in U \cap W$ y veamos que $u + v \in U \cap W$. En efecto, si $u \in U \cap W$, entonces $u \in U$ y $u \in W$; además, si $v \in U \cap W$, entonces $v \in U$ y $v \in W$. Como U es subespacio vectorial de V entonces $u + v \in U$; y por la misma razón $u + v \in W$. Por tanto $u + v \in U \cap W$.

b) Consideremos $u \in U \cap W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y veamos que $\lambda u \in U \cap W$. En efecto, si $u \in U \cap W$, entonces $u \in U$ y $u \in W$. Como U es subespacio vectorial de V entonces $\lambda u \in U$; y por la misma razón $\lambda u \in W$. Por tanto $\lambda u \in U \cap W$.

Se deja como ejercicio la prueba de que $U + W$ es subespacio vectorial. $\square$

Nota 3.2.6 Si U y W son dos subespacios vectoriales de V, en general el subconjunto de V, $U \cup W$, no es subespacio vectorial de V.

En efecto, consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ y los subespacios vectoriales

$$U = \{\, (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad W = \{\, (0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

El vector $u = (1, 0) \in U$ y por tanto $u \in U \cup W$. El vector $w = (0, 1) \in W$ y por tanto $w \in U \cup W$. Sin embargo, el vector $u + w = (1, 1) \notin U$ y $u + w = (1, 1) \notin W$, por lo que se deduce que $u + w = (1, 1) \notin U \cup W$. Luego el conjunto $U \cup W$ no es subespacio vectorial de V.

3.3 Combinaciones lineales

Definición 3.3.1 Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V \text{ y } \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset \mathbb{R}.$$

Un elemento de V de la forma $k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_mv_m$ se denomina **combinación lineal** en V de los vectores $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_m$, y se dice que $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son los **coeficientes** de dicha combinación lineal. Abreviadamente escribiremos c. l. para referirnos a la expresión combinación lineal.

Definición 3.3.2 El conjunto

$$\{\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ se llama **clausura lineal** de $\{v_1, v_2, \ldots \ldots, v_m\ \}$. Se denota $\mathbb{R}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ó $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$.

Proposición 3.3.3 *Dados $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$, su clausura lineal $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$ es un s. v. de V .*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle \ \leq\ V$$

Demostración. De nuevo hacemos uso de la proposición 3.2.2

a) Consideremos
$$u, v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$$
y veamos que $u+v \in \langle v_1, v_2, \ldots \ldots, v_m\rangle$. En efecto, si $u, v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$, entonces $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$ y $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m$. Por tanto, $u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m + \beta_m)v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$.

b) Consideremos
$$u \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle, \lambda \in \mathbb{R}$$
y veamos que $\lambda u \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$. En efecto, si $u \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$, entonces $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$ y por tanto,
$$\lambda u = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\alpha_2)v_2 + \ldots + (\lambda\alpha_m)v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle .$$

Ejemplo 3.3.4 Sea $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 0)$. Entonces

$$\langle v_1, v_2\rangle = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\ \}\ \leq V .$$

Nota 3.3.5 $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

3.4 Sistemas libres

Definición 3.4.1 Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots \ \ldots, v_m\}$ un subconjunto finito no vacío de vectores de V. Se dice que S es libre (o que los vectores $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_m$ son linealmente independientes) si $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_mv_m = 0$ implica que $k_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

En otro caso, es decir, si existen $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_mv_m = 0$, se dice que el sistema S es ligado (o que los vectores $v_1, v_2, \ldots \ \ldots, v_m$ son linealmente dependientes).

Nota 3.4.2

a) Obsérvese que si en $0 \in S$, entonces S es un sistema ligado. Si $S = \{0, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, entonces basta tomar como coeficientes $1, 0, \ldots \ldots, 0$ (no todos nulos) para obtener la combinación lineal $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m = 0$.

b) Es condición necesaria para que el sistema S sea libre que los vectores v_i sean todos distintos entre sí. En otro caso, si $v_i = v_j$ una combinación lineal con coeficientes no nulos sería $0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + (-1) \cdot v_j + \ldots + 0 \cdot v_m = 0$.

Ejercicio 3.4.3 Probar que $S = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ es un sistema libre.

En efecto, si

$$k_1(1,1,0) + k_2(0,1,1) + k_3(1,1,1) = 0,$$

entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1 \qquad\ + k_3 &=& 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &=& 0 \\ k_2 + k_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible determinado. Por ser homogéneo, la única solución es la trivial. Por tanto, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ y el sistema S es libre.

Ejercicio 3.4.4 Demostrar que un sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es ligado si y sólo si existe un vector $v_i \in S$ combinación lineal de los demás.

Ejercicio 3.4.5 Probar que $S = \{ (3,1,-1), (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1) \}$ es un sistema ligado.

Utilizaremos el enunciado del ejercicio anterior. Veamos si es posible expresar uno de los cuatro vectores de S como combinación lineal de los otros. Por ejemplo, veamos si $(3,1,-1)$ puede expresarse como c. l. de los otros vectores.

$$¿\ (3,1,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1)\ ?$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \alpha + \gamma &=& 3 \\ \alpha + \beta + \gamma &=& 1 \\ \beta + \gamma &=& -1 \end{array} \right.$$

Obsérvese que la matriz de coeficientes de este sistema coincide con la del ejercicio 3.4.3. Por tanto, de nuevo se trata de un sistema es compatible determinado. A diferencia, en este caso el sistema no es homogéneo. Resolviendo obtenemos $\alpha = 2$, $\beta = -2$ y $\gamma = -1$. Por lo que podemos finalmente escribir

$$v_1 = 2\,v_2 - 2\,v_3 - v_4\,,$$

donde hemos llamado

$$v_1 = (3,1,-1)\,, v_2 = (1,1,0)\,, v_3 = (0,1,1) \text{ y } v_4 = (1,1,1)\,.$$

Nota 3.4.6 Si v_1 no hubiese sido c.l. de los demás vectores *no* habríamos podido afirmar nada acerca de si el sistema S era o no libre.

3.5 Sistemas generadores

Definición 3.5.1 Sea V un e. v. y $S = \{w_1, \cdots, w_t\}$ un subconjunto no vacío de V. Diremos que S es un sistema generador de V si cada vector de V se puede expresar como un c. l. de elementos de S; o sea, dado $v \in V$ existen escalares $k_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = k_1 w_1 + \ldots + k_t w_t \qquad \text{para algún} \quad t \in \mathbb{N}\,.$$

Abreviadamente escribiremos S es un s. g. de V.

Ejemplo 3.5.2 $S = \{ (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1) \}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. Por tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como c. l. de los elementos de S. Dado un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $(3,1,-1)$, calcularemos a continuación los coeficientes α, β y γ de la combinación lineal correspondiente.

$$(3,1,-1) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \gamma\,(1,1,1)\,.$$

Se trata de una igualdad en $\mathbb{R}^3$, equivalente al siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} \;\;3 = \alpha + \beta \\ \;\;1 = \alpha + \beta + \gamma \\ -1 = \beta + \gamma\,, \end{cases}$$

que tiene solución única.

3.6 Base de un espacio vectorial

Definición 3.6.1 Sea V un e. v. y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un subconjunto finito no vacío de vectores de V. Se dice que S es una base de V si S es libre y sistema generador de V.

Nota 3.6.2 Existen espacios vectoriales que no poseen bases finitas. Se puede definir también el concepto de base con un número infinito de elementos, aunque estos e.v. quedan fuera de lo que se va a estudiar este curso.

Ejercicio 3.6.3 Probar que el sistema de vectores $S = \{ e_1, e_2, e_3 \}$, donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$, es una base de $\mathbb{R}^3$. Esta base se conoce con el nombre de base canónica.

Proposición 3.6.4 *Sea V un espacio vectorial y $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ un sistema generador de V. Entonces existe un subconjunto de $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ que es base de V (de un sistema generador siempre se puede extraer una base).*

Demostración. Si $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ es libre ya está.

En otro caso, el sistema es ligado, y por tanto, un vector v_i se puede expresar como combinación lineal de los otros. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que ese vector es v_1 (si no fuera v_1 haríamos una reordenación para que lo fuera), y veamos que

$$\{ v_2, \ldots, v_n \}$$

también es sistema generador de V.

En efecto, si $v \in V$ entonces

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \,, \tag{3.1}$$

por ser $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ sistema generador de V. Pero v_1 es combinación lineal de $\{ v_2, \ldots, v_n \}$ y por tanto existen escalares $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \,.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} v &= k_1(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = \\ &= (k_1\alpha_2 + k_2) v_2 + \ldots + (k_1 \alpha_n + k_n) v_n \,, \end{aligned}$$

es decir, el vector v expresado como combinación lineal de los vectores de $\{ v_2, \ldots, v_n \}$.

Si $\{ v_2, \ldots, v_n \}$ fuese un sistema libre el proceso estaría terminado. En otro caso, si $\{ v_2, \ldots, v_n \}$ fuera ligado reiteraríamos todo lo hecho anteriormente: extraeríamos un elemento de $\{ v_2, \ldots, v_n \}$ combinación lineal de los otros para quedarnos con $\{ v_3, \ldots, v_n \}$, y así sucesivamente hasta obtener un sistema libre, que será la base de V. Obsérvese que el proceso tiene fin. $\square$

Ejercicio 3.6.5 Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$S = \{ (x, y, z, t) \mid x = y - z + t \} \,.$$

Estudiar si $B = \{ (1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,1,1,1) \}$ es una base de S (obsérvese que $B \subset S$, es decir, todos los elementos de B están en S).

Veamos en primer lugar si B es sistema generador de S. Para ello consideramos un elemento genérico $(y - z + t, y, z, t)$ de S y comprobamos que se puede expresar como c. l. de los elementos de B. Debemos encontrar α, β, γ y δ tales que

$$(y - z + t, y, z, t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1) + \delta(1,1,1,1) \,.$$

A partir de esta igualdad obtenemos el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{llllll} \alpha - \beta + \gamma + \delta = y - z + t \\ \alpha \qquad\qquad\; + \delta = y \\ \qquad \beta \qquad + \delta = z \\ \qquad\qquad \gamma + \delta = t \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Hacemos un estudio del rango, mediante las correspondientes transformaciones, obteniendo

$$(\,A\,|\,b) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 1 & 1 & y-z+t \\ 0 & 1 & -1 & 0 & z-t \\ 0 & 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg(A|b) = 3 < 4 = n$. Por tanto el sistema es compatible indeterminado(1). Si elegimos como parámetro δ, entonces la solución es

$$\{\,(y-\delta, z-\delta, t-\delta, \delta) \mid \delta \in \mathbb{R}\,\}$$

y así

$$\begin{aligned}(y-z+t, y, z, t) \;&= (y-\delta)(1,1,0,0) + (z-\delta)(-1,0,1,0) + \\ &+(t-\delta)(1,0,0,1) + (\delta)(1,1,1,1)\,.\end{aligned}$$

Si tomamos, por ejemplo, $\delta = 0$ se tiene que

$$(y-z+t, y, z, t) = y(1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(1,0,0,1)\,,$$

y por tanto hemos probado que el sistema de vectores

$$\{\,(1,1,0,0)\,, (-1,0,1,0)\,, (1,0,0,1)\,\}$$

es sistema generador de S.

Veamos a continuación si B es un sistema libre. De la ecuación vectorial

$$\alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1) + \delta(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

obtenemos el sistema lineal homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha \qquad\qquad\; + \delta = 0 \\ \qquad \beta \qquad + \delta = 0 \\ \qquad\qquad \gamma + \delta = 0 \end{array}\right.$$

cuya matriz de coeficientes coincide con la obtenida anteriormente en (3.2). Por tanto, efectuando las mismas transformaciones que en el caso anterior obtenemos la matriz

$$(A \mid b) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg(A|b) = 3 < 4 = n$. Por tanto el sistema es compatible indeterminado(1). Hay infinitas soluciones, además de la solución trivial. Por tanto α, β, γ y δ no son necesariamente nulos y el sistema no es libre.

Ejercicio 3.6.6 Extraer una base de S a partir del sistema generador B del ejercicio anterior.

Hemos visto que B era un sistema ligado, por lo tanto, sabemos que existe un vector que es c.l. de los otros. En efecto,

$$(1,1,1,1) = (1,1,0,0) + (-1,0,1,0) + (1,0,0,1)\,.$$

Eliminamos el vector $(1,1,1,1)$, para considerar ahora el subsistema

$$C = \{\,(1,1,0,0)\,,(-1,0,1,0)\,,(1,0,0,1)\,\} \subset B\,.$$

Por lo visto en la demostración de la proposición 3.6.4, el sistema C es sistema generador (hemos quitado un vector que era c. l. del resto de vectores). Por tanto sólo hay que ver si es libre. De la igualdad

$$\alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1) = 0$$

obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha - \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha \qquad\quad & = & 0 \\ \beta \quad\ & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

de donde se deduce que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y por tanto el sistema C es libre, luego es base de S.

Teorema 3.6.7 *Todo sistema libre de vectores de V se puede completar hasta formar una base de V.*

Demostración. Sea $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_r \} \subset V$ un sistema libre. Si S fuera sistema generador de V, sería además una base de V. En otro caso, si S no es sistema generador de V será porque existe al menos un vector $v \in V$ tal que v no se puede expresar como c. l. de los vectores de S, es decir, $v \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$.

Consideremos el sistema de vectores $\{ v, v_1, v_2, \dots, v_r \} \subset V$ y veamos que es un sistema libre.

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = 0 \tag{3.3}$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces

$$v = \frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} v_2 + \ldots + \frac{\alpha_r}{\alpha} v_r,$$

es decir, v es c. l. de $v_1, v_2, \dots, v_r$. Pero esto no puede ser porque $v \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$. Por tanto $\alpha = 0$, de donde se deduce que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = 0.$$

Pero $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ era un sistema libre, y por tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Como todos los coeficientes de la combinación lineal (3.3) son nulos, el sistema $\{ v, v_1, v_2, \dots, v_r \}$ es libre.

Si $\{ v, v_1, v_2, \dots, v_r \}$ es sistema generador de V, entonces es una base de V. En otro caso reiteramos el proceso anterior ampliando el sistema de vectores hasta conseguir que sea sistema generador. Como estamos considerando que V es un e.v. con una base finita, este proceso tiene fin. $\square$

Teorema 3.6.8 *Sea V un espacio vectorial no nulo. Entonces todas las bases de V poseen la misma cardinalidad. Dicho cardinal se denomina* dimensión *del espacio vectorial y se denota* $\dim V$.

Nota 3.6.9 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ tiene dimensión n. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es

$$\{ (1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \ \dots \ , (0,0,\dots,1) \} .$$

Nota 3.6.10 Si sabemos que la dimensión de un espacio vectorial V es r entonces un sistema formado por r vectores $\{ v_1, v_2, \dots, v_r \}$ de V es base de V si y sólo si es libre y si y sólo es sistema generador de V. Es decir, para probar que dicho sistema es una base de V basta con ver que es libre o sistema generador de V.

Si no conocemos la dimensión del espacio entonces, para probar que $\{ v_1, v_2, \dots$ $\dots, v_s \}$ es una base de V, habrá que ver que es libre y sistema generador de V. Entonces, a posteriori, podremos afirmar que $\dim V = s$.

3.7 Coordenadas de un vector respecto de una base

Definición 3.7.1 Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V. Dado $v \in V$, por ser B sistema generador de V, se tiene que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m .$$

Los coeficientes de la combinación anterior $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ se llaman coordenadas del vector v en la base B.

Proposición 3.7.2 *Las coordenadas de un vector en una base son únicas.*

Demostración. Sea V el espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V y $v \in V$. Si

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m \qquad \text{y} \qquad v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m ,$$

restando ambas expresiones obtenemos

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)v_m ,$$

y como B es libre se tiene que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0\,, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0\,, \quad \ldots \quad , \alpha_m - \beta_m = 0\,.$$

$\square$

Nota 3.7.3 Si $V = \mathbb{R}^n$ y B es la base canónica, entonces las coordenadas de v respecto de la base B coinciden con las componentes de V.

3.7.1 Cambio de coordenadas

Sea V un espacio vectorial y sean

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

dos bases de V. Dado un vector $v \in V$, podemos escribir

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \tag{3.4}$$

por ser B_1 sistema generador de V, y también

$$v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n \tag{3.5}$$

por ser B_2 sistema generador de V. Nos preguntamos ahora qué relación hay entre los coeficientes (3.4) de v en la primera base y los coeficientes (3.5) de v en la segunda base.

Para responder a la pregunta escribiremos cada uno de los vectores w_i de (3.5) como c. l. de los vectores de la base B_1

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\
w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\
&\vdots \\
w_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n \,.
\end{aligned}$$

En tal caso, la igualdad (3.5) queda

$$\begin{aligned}
v = \; & \beta_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n) + \\
& \beta_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n) + \\
& \ldots \\
& +\beta_n(a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n) \,,
\end{aligned}$$

y reordenando coeficientes

$$\begin{aligned}
v &= (\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_n a_{n1})v_1 + \\
&= (\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_n a_{n2})v_2 + \\
& \ldots \\
&= (\beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_n a_{nn})v_n \,.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas de un vector en una base son únicas, si comparamos la última igualdad con (3.4), se obtiene el resultado buscado

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_n a_{n1} \\
\alpha_2 &= \beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_n a_{n2} \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_n a_{nn} \,.
\end{aligned}$$

La última expresión se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

o bien

$$\boxed{\alpha = P\beta} \tag{3.6}$$

donde α son las coordenadas de v en B_1, β son las coordenadas de v en B_2 y la matriz P, por columnas, está formada por las coordenadas de los elementos de B_2 expresados en la base B_1.

Obsérvese que en esta última igualdad, si premultiplicamos por P^{-1} entonces obtenemos

$$\beta = P^{-1}\alpha \tag{3.7}$$

Nota 3.7.4 Si en lugar de expresar los w_i de (3.5) en la base B_1, hubiésemos expresado los v_i de (3.4) en la base B_2, entonces habríamos llegado directamente a la expresión (3.7). ¿Podrías deducir entonces cómo son las columnas de la matriz P^{-1} ?

Ejemplo 3.7.5 Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $v_1 = (1,2,3)$. Calcular las coordenadas del vector v en las bases B_1 y B_2, donde B_1 es la base canónica y

$$B_2 = \{ (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) \}.$$

Por ser B_1 la base canónica, las coordenadas de v en esta base coinciden con sus componentes: $\alpha = (1,2,3)^t$. Para calcular las coordenadas β de v en la otra base tenemos en cuenta la igualdad (3.6)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.8 Rango de una matriz y cálculo práctico de la dimensión y de una base en $\mathbb{R}^n$

Cuando se aborda el tema de matrices después de haber estudiado espacios vectoriales y definido el concepto de combinación lineal, es habitual definir el rango de una matriz de la siguiente manera:

Definición 3.8.1 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, el rango de A es el número de filas de A linealmente independientes.

Nota 3.8.2 El rango de A es el número de columnas de A linealmente independientes.

3.8.1 Cálculo práctico de dimensiones y bases en $\mathbb{R}^n$

Hemos estudiado en el tema anterior trasformaciones que mantienen el rango de una matriz. Si consideramos ahora S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y un conjunto de vectores

$$B = \{s_1, \cdots, s_t\},$$

podemos escribir cada vector en una fila y formar una matriz $A \in \mathcal{M}_{t\times n}$. Hay que tener en cuenta ahora que las transformaciones que mantienen el rango de A, tienen la propiedad de que las filas de la matriz transformada siguen siendo elementos de S, y si B era un s.g. de S, también lo es el sistema formado por las filas de la matriz transformada.

La última propiedad que necesitamos para calcular una base de S es la que nos asegura que si los elementos de un sistema B de vectores de S dispuestos por filas en una matriz como hemos hecho antes, dan lugar a una matriz triangular en la que no hay ninguna fila de ceros, entonces el sistema B es libre.

3.9 Problemas del capítulo 3

1. Sea el conjunto $\mathbb{R}^2$ en el que hay definidas dos operaciones, una interna $(+)$, y otra externa $(*)$ con dominio de operadores en $\mathbb{R}$, de la siguiente forma:

   (a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

   (b) $\alpha * (x, y) = (\alpha x, y)$

   Estudiar si este conjunto con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial.

2. Deducir razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, .)$

   (a) $S_1 = \{(x, y, z) \,|\, x + y = 0, z = 0\}$

   (b) $S_2 = \{(x, y, z) \,|\, x + 2y = 0, z = -x\}$

   (c) $S_3 = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = 0\}$

   (d) $S_4 = \{(x, y, z) \,|\, x + 2y + z = 1\}$

   (e) $S_5 = \{(x, y, z) \,|\, x = y = z\}$

   (f) $S_6 = \{(x, y, z) \,|\, x + 2y = 0\}$

   (g) $S_7 = \{(x, y, z) \,|\, x = y = z^2\}$

   (h) $S_8 = \{(x, y, z) \,|\, y = 0\}$

3. Comprobar que los vectores:

   $$v_1 = (0, 1, -2, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 0, -1), \quad v_3 = (1, 1, 1, 1), \quad v_4 = (-1, -2, 4, -3)$$

   de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

4. Determinar α y β para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ sean linealmente dependientes, indicando la relación de dependencia que los liga:

   $$v_1 = (3, -2, -1, 3), \quad v_2 = (1, 0, 2, 4), \quad v_3 = (1, -3, \alpha, \beta)$$

5. Determinar α y β para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ sean linealmente dependientes, indicando la relación de dependencia que los liga:

   $$v_1 = (1, 2, \alpha, 1), \quad v_2 = (\alpha, 1, 2, 3), \quad v_3 = (0, 1, \beta, 0)$$

6. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^4$ forman un sistema libre o ligado:

   $S_1 = \{(1, -1, 5, 6), (1, 5, -3, 0), (2, -2, 9, 7), (-1, 8, -4, -2), (-3, 7, 4, 2)\}$

   $S_2 = \{(1, -1, 5, 6), (1, 5, -3, 0), (-1, -11, 11, 6)\}$

   $S_3 = \{(1, -1, 5, 6), (1, 5, -3, 0), (-1, -2, 0, 6)\}$

7. Sea el espacio vectorial V de los polinomios de grado ≤ 2 en una variable con coeficientes reales. Demostrar que:

$$P_1 = 1 + x, \quad P_2 = x + x^2, \quad P_3 = 1 + x^2$$

forman una base de V. Hallar las coordenadas del polinomio $p = 3 + 2x + 5x^2$ respecto de esa base.

8. Hallar una base de cada subespacio vectorial del ejercicio 2.

9. Encontrar entre los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^4$ un subconjunto con el mayor número de vectores linealmente independientes:

   (a) $\{(1,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(2,0,-1,0)\}$

   (b) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

   (c) $\{(1,-1,1,1),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1),(1,-1,-1,-1)\}$

10. Sean u, v, w tres vectores de un espacio vectorial V, demostrar que si $\{u, v, w\}$ es una familia libre, entonces $\{u+v, v+w, w+u\}$ es también una familia libre.

11. Demostrar que $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de $(1,2,-3)$ en dicha base.

12. Sean $B_1 = \{(1,0,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,2)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas del vector $v = (2,-3,4)$ en las dos bases. Hallar la matriz de cambio de base P y comprobar que $X = PY$ donde X es la matriz columna de coordenadas de v en B_1 e Y es la matriz columna de coordenadas de v en B_2.

13. Sean $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,2)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas del vector $v = (2,-3,4)$ en las dos bases. Hallar la matriz de cambio de base P y comprobar que $X = PY$ donde X es la matriz columna de coordenadas de v en B_1 e Y es la matriz columna de coordenadas de v en B_2. Comparar este ejercicio con el anterior.

14. Sea S el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 de la forma:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a+b & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Estudiar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2. En caso afirmativo dar la dimensión y una base de S.

15. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar el valor de m para que existan matrices B cuadradas y no nulas tales que $AB = 0$.

   (b) Demostrar que el conjunto de dichas matrices es un subespacio vectorial de M_2

   (c) Hallar la dimensión de este subespacio vectorial y una base del mismo.

16. Dado el cambio de base:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 3e_3 \\ v_2 &= e_2 + e_3 \\ v_3 &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

    (a) Escribir las coordenadas de $v = 2v_1 - 3v_2 + 2v_3$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$

    (b) Escribir las coordenadas de $v = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3$ en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$

17. Sea S el subconjunto de M_2 de la forma:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

    (a) Estudiar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial de M_2. En caso afirmativo dar la dimensión y una base de S.

    (b) Sea $A \in S$, demostrar que $AB = BA$, $\forall B \in M_2$.

    (c) Sea $A \in S$ inversible, hallar A^{-1} sabiendo que pertenece a S.

18. Consideramos el siguiente subconjunto de M_2:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a + d = b + c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

    (a) Demostrar que S es subespacio vectorial de M_2.

    (b) Hallar una base y la dimensión de S.

    (c) Calcular las coordenadas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

    en la base hallada en el apartado anterior.