Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conjuntos

La definición matemática de conjunto es algo complicada. No obstante, para las definiciones y propiedades que consideraremos más adelante será suficiente con manejar la idea intuitiva de conjunto como colección de objetos. Un conjunto se puede describir de dos maneras: por **enumeración** (extensión o explícitamente), que consiste en especificar todos los elementos del conjunto, o por **comprensión** que consiste en dar una propiedad que caracterice los elementos del conjunto.

Ejemplo 1.1.1 Sea $A = \{1, 3, 5\}$, este conjunto está definido por extensión. Para definir este mismo conjunto por comprensión, podríamos poner

$$A = \{ \text{ números naturales impares} \leq 5\}.$$

Asociados a un conjunto aparecen los siguientes conceptos:

1. Pertenencia: Si A es un conjunto y x está en A, se dice que x es un **elemento** de A, o que x **pertenece** a A y se denota $x \in A$. En otro caso se denota $x \notin A$.

   Nota 1.1.2 los conjuntos se suelen denotar con letras mayúsculas y los elementos con minúsculas.

2. Inclusión: Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A está **incluido o contenido en** (o es subconjunto de) B si todo elemento de A es elemento de B. Se denota $A \subset B$ ó $B \supset A$. En otro caso, se denota $A \not\subset B$.

Nota 1.1.3 *En esta definición está contemplado el caso $A = B$. La notación $\subsetneq$significa $A \subset B$ y $A \neq B$, es decir, $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$. Obsérvese que $A = B$ si y sólo si todo elemento de A es elemento de B y viceversa. Es decir, $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.*

3. Conjunto universal: es un conjunto total de referencia. Se denota E o U. Por ejemplo, si consideramos los conjuntos:

$$A = \{\text{alumnos de } 1^o \text{ de I.T.A. en la UPNA}\}$$

y

$$B = \{\text{alumnos de } 2^o \text{ de I.I. en la UPNA}\},$$

un conjunto de referencia sería:

$$U = \{\text{alumnos de la UPNA}\}.$$

4. Conjunto vacío: es el conjunto que no tiene ningún elemento. Se denota $\emptyset$.

5. Conjunto de las partes de un conjunto: dado un conjunto A, el conjunto partes de A, denotado $\mathcal{P}(A)$ es otro conjunto formado por todos los subconjuntos de A. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Nota 1.1.4 Si $\text{card}(A) = n$, entonces $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

6. Conjunto unión: Sean A y B dos subconjuntos de U, el conjunto $A \cup B$ es el formado por los elementos que están en A o están en B. Abreviadamente:
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

7. Conjunto intersección: Sean A y B dos subconjuntos de U, el conjunto $A \cap B$ es el formado por los elementos que están en A y están en B. Abreviadamente:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Nota: Si $A \cap B = \emptyset$, A y B se dicen disjuntos.

8. Conjunto complementario: Sea A un subconjunto de U, su complementario, denotado A^c, es el conjunto formado por los elementos de U que no están en A. Abreviadamente:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Por ejemplo, si $U = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ y

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par }\},$$

entonces

$$A^c = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar }\}.$$

9. Conjunto diferencia: Sean A y B subconjuntos de U se define:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Nota: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \setminus B = A$.

10. Producto cartesiano: Dados dos conjuntos A y B se define:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

1.2 Aplicaciones

Definición 1.2.1 Sean A y B dos conjuntos. Una correspondencia entre A y B es una ley que asocia elementos de A con elementos de B. Una aplicación entre A y B es una correspondencia que asocia a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B. Se denota:

$$\begin{array}{rl} f: & A \to B \\ & a \mapsto b \end{array}$$

b se llama imagen de a y a se llama antiimagen de b. Observemos que en una aplicación, fijado $a \in A$, su imagen b siempre existe y es única, pero dado $b \in B$, no siempre existe su antiimagen, y si existe, no es necesariamente única. Una aplicación $f : A \to B$ se llama inyectiva si $\forall a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$ se tiene $f(a_1) \neq f(a_2)$. Una aplicación $f : A \to B$ se llama suprayectiva o sobre si todo elemento de B tiene antiimagen. Una aplicación $f : A \to B$ se llama biyectiva si es a la vez inyectiva y sobre.

1.3 Operaciones binarias y estructuras algebraicas

Para entender esta sección, podemos pensar en un ejemplo muy sencillo: la operación $2+5=7$ puede interpretarse como asociar a la pareja de números naturales $(2,5)$ el número natural 7. Pensando en generalizar este ejemplo, aparece la siguiente:

Definición 1.3.1 Dado un conjunto A, una operación binaria interna sobre A es una aplicación:

$$\begin{aligned} *: \quad & A \times A \to A \\ & (a_1, a_2) \mapsto a_3 \end{aligned}$$

Abreviadamente se denota $a_3 = a_1 * a_2$.

1.3.1 Propiedades que puede cumplir una operación binaria

Sea A un conjunto y $*$ una operación binaria interna sobre A. Se dice que $*$ es:

1. Asociativa si $\forall a, b, c \in A$, $a*(b*c) = (a*b)*c$.

2. Conmutativa si $\forall a, b \in A$, $a*b = b*a$.

3. Se dice que en A existe elemento neutro para la operación $*$ si $\exists e \in A$ tal que $\forall a \in A$, $a*e = e*a = a$.

4. Si en A existe elemento neutro para la propiedad $*$, se dice que $*$ tiene la propiedad del elemento simétrico si $\forall a \in A$, $\exists b \in A$ tal que
$$a*b = b*a = e$$
donde e es el elemento neutro. b se llama simétrico de a y se denota a^{-1}.

5. Sea A un conjunto con dos operaciones internas, $\perp$ y $*$. Se dice que $\perp$ es distributiva respecto de $*$ si $\forall a, b, c \in A \quad a \perp (b*c) = (a \perp b)*(a \perp c)$.

Ejemplo 1.3.2 Sean $A = \mathbb{N}$, $*$ la suma habitual $(+)$ y $\perp$ el producto habitual $(\cdot)$. Tenemos una propiedad conocida: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Notemos que no es lo mismo decir "$\perp$ es distributiva respecto de $*$" que decir "$*$ es distributiva respecto de $\perp$".

1.4 Estructuras algebraicas

La idea a la que intentaremos dar forma en este párrafo es poner nombre a ciertas "colecciones" interesantes de conjuntos con una o dos operaciones binarias internas que verifican ciertas propiedades.

1. Estructura de grupo: Sea G un conjunto y
$$* : G \times G \to G\,,$$
se dice que $(G, *)$ tiene estructura de **grupo** si $*$ verifica las propiedades asociativa, elemento neutro y elemento simétrico. Si además $*$ es conmutativa el grupo se llama **conmutativo** o abeliano.

2. Estructura de anillo: Sea A un conjunto y
$$* : A \times A \to A\,, \qquad \perp : A \times A \to A\,,$$
se dice que $(A, *, \perp)$ tiene estructura de **anillo** si $(A, *)$ es grupo abeliano, $\perp$ es asociativa y $\perp$ es distributiva respecto de $*$.

3. Estructura de cuerpo: Sea K un conjunto y
$$* : K \times K \to K\,, \qquad \perp : K \times K \to K\,,$$
se dice que $(K, *, \perp)$ tiene estructura de **cuerpo** si $(K, *, \perp)$ es un anillo, $\perp$ tiene elemento neutro y todo elemento de K salvo el neutro de $*$ tiene simétrico respecto de la operación $\perp$. Si además, $\perp$ es conmutativa, el cuerpo se llama **conmutativo**.

Ejemplo 1.4.1 Consideramos el conjunto de los números naturales:
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
y las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ habituales. $+$ es asociativa, tiene elemento neutro y es conmutativa. Sin embargo, no todos los elementos tienen simétrico respecto de $+$. Así, $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo.

Consideramos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$ y las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ habituales. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es grupo (no se verifica la propiedad del elemento simétrico). $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo.

Consideramos el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, que es el conjunto de los decimales periódicos, y las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ habituales. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

Consideramos el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ y las operaciones suma y producto habituales. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

1.4.1 Operaciones binarias externas

Definición 1.4.2 Sean A y B dos conjuntos. Se dice que $\Box$ es una operación binaria externa en A con dominio de operadores en B si:

$$\begin{array}{rl} \Box: & B \times A \to A \\ & (b,a) \mapsto b \,\Box\, a \end{array}$$

Ejemplo 1.4.3 Sean $A = P_2(x) = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $B = \mathbb{R}$. Consideramos la siguiente operación:

$$\begin{array}{rlcl} \Box: & \mathbb{R} \times A & \to & A \\ & (r, ax^2 + bx + c) & \mapsto & (ra)x^2 + (ra)x + (ra) \end{array}$$

(producto de número real por polinomio, ya conocida). Esta es una operación binaria externa en $P_2(x)$ con dominio de operadores en $\mathbb{R}$.

1.5 Problemas del capítulo 1

1. Sean los conjuntos:
   $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ \mid x \mid < 15\}$
   $B = \{x \in A \mid x \text{ es par } \}$
   $C = \{x \in A \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}$.

   (a) Definir A, B, y C por extensión.

   (b) Definir por extensión y por comprensión los siguientes conjuntos:

   $$B \cup C, \quad B \cap C, \quad A - B, \quad A - C, \quad A - (B \cup C), \quad A - (B \cap C)\,.$$

2. Sean A, B y C tres conjuntos que verifican $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$. Demostrar que $A = B = C$.

3. Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, e, g, h\}$, $C = \{a, b, g, h, i\}$. Si $n(A)$ denota el número de elementos de A, hallar $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$, $n(A \cap C)$, $n(A \cup C)$, $n(B \cap C)$, $n(B \cup C)$. Encontrar una relación que cumplan las cantidades halladas.

4. De 120 alumnos de primer curso de I.T.A. que se han examinado hasta abril de Álgebra y Cálculo, 40 han aprobado Álgebra, 60 han aprobado Cálculo, y 32 han aprobado los dos parciales. Calcular el número de alumnos presentados que han suspendido ambos parciales.

5. Demostrar las siguientes relaciones entre conjuntos:

   (a) $A \cap B \subset A, \qquad A \cap B \subset B$

   (b) $A \subset A \cup B, \qquad B \subset A \cup B$

   (c) $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$

   (d) $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$

6. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades:

   (a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   (b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   Nota: Las dos igualdades anteriores se conocen como Leyes de Morgan.

7. Si A, B, y C son tres conjuntos, demostrar:

   $$A \cup B = B \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \subset C$$

8. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, establecer si es posible:

   (a) Una aplicación inyectiva de A en B.

   (b) Una aplicación suprayectiva de A en B.

   (c) Una aplicación inyectiva de B en A.

(d) Una aplicación suprayectiva de B en A.

9. Consideremos las correspondencias f_1 y f_2 entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, A y B, dadas por $f_1(x) = \sqrt{x}$, y $f_2(x) = x^2$. Razonar en qué casos de los siguientes f_1 y f_2 son aplicaciones, especificando el tipo de aplicación en los casos afirmativos.

   (a) $A = \mathbb{Z}$, y $B = \mathbb{R}$

   (b) $A = \mathbb{Z}$, y $B = \mathbb{R}^+$

   (c) $A = \mathbb{R}^+$, y $B = \mathbb{R}$

   (d) $A = \mathbb{R}^+$, y $B = \mathbb{R}^+$

   (e) $A = \mathbb{R}$, y $B = \mathbb{R}^+$

   (f) $A = N$, y $B = \mathbb{R}^+$

   (g) $A = \mathbb{N}$, y $B = \mathbb{R}$

10. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define la operación interna $a \perp b = a + 2ab$. Calcular:
    a) $(a \perp b) \perp (a \perp b)$
    b) $a \perp (b \perp c) + (a \perp b) \perp c$

11. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se define las operaciones internas $*$, y $\perp$ de la siguiente forma:
    $$a * b = a + ab, \qquad a \perp b = a + b - ab$$
    Estudiar la conmutatividad, la asociatividad, y la existencia de elemento neutro para cada una de las operaciones.

12. Estudiar si el conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación interna $a * b = a + b - 2$ tiene estructura de grupo. ¿Y si consideramos el conjunto $\mathbb{N}$ con la misma operación?

Capítulo 2

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Matrices

Definición 2.1.1 Una matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto de números reales dispuestos ordenadamente en m filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, \ldots, n\,,\ j = 1, \ldots, m\,.$ El elemento a_{ij} de la matriz A es el que ocupa la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima.

Hay varias formas de referirse a la matriz A:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i\,=\,1,\ldots,n \\ j\,=\,1,\ldots,m}} \qquad \text{o simplemente} \qquad A = (a_{ij})$$

Las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas y sus elementos con la letra minúscula correspondiente. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}\ \ i = 1, \ldots, n\,, j = 1, \ldots, m\,.$

Definimos a continuación varios conceptos asociados al de matriz.

1. El conjunto de matrices sobre $\mathbb{R}$ de orden $m \times n$ se denota $\mathcal{M}_{m\times n}$.

2. Se dice que una matriz A es **cuadrada** si $m = n$, es decir, el número de filas coincide con el número de columnas. En este caso se dice que la matriz A es cuadrada de orden n.

3. Se dice que la matriz A es una **matriz fila** si $m = 1$.

4. Se dice que la matriz A es una **matriz columna** si $n = 1$.

5. Se llama **diagonal principal** de una matriz al conjunto formado por los elementos de la forma a_{ii}.

6. Se dice que A es una **matriz diagonal** si es una matriz cuadrada y todos sus elementos, salvo quizá los de la diagonal principal, son nulos.
$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j\,.$$

7. Se dice que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una matriz **triangular superior** si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.
$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j\,.$$

8. Se dice que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una matriz **triangular inferior** si todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos.
$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j\,.$$

9. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, si eliminamos alguna fila y/o columna, obtenemos otra matriz B, a la que llamamos **submatriz** de A.

Ejemplo 2.1.2 Para la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}\,,$$
podemos considerar, entre otras, las siguientes submatrices
$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Operaciones con matrices

Suma: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, llamaremos suma de las matrices A y B a la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Escribiremos

$$C = A + B\,.$$

Ejemplo 2.1.3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposición 2.1.4 *$(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.*

Demostración. Es inmediata. Basta con probar que se verifican las propiedades asociativa, elemento neutro, elemento opuesto y conmutativa.

1. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se verifica $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. Encontrar una matriz $E \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $A + E = E + A = A$
3. Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ hay que encontrar una matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $A + B = B + A = E$
4. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ hay que probar que $A + B = B + A$.

Producto (de un número real por una matriz): Dado $r \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamaremos producto del número real r por la matriz A y lo representaremos rA a la matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$ tal que su elemento (i, j) es $r \cdot a_{ij}$

Ejemplo 2.1.5

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Proposición 2.1.6 *La operación definida verifica las siguientes propiedades:*

1. *Es una operación binaria externa con dominio de operadores en $\mathbb{R}$.*
2. *$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\forall r \in \mathbb{R}$ se tiene que $r(A + B) = rA + rB$.*

3. *$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\forall r, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $(r+s)A = rA + sA$.*

4. *$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\forall r, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $(rs)A = r(sA)$.*

5. *$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se verifica $1A = A$.*

Producto (de dos matrices): Dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$ se dicen multiplicables si $n = p$ (el número de columnas de A coincide con el número de filas de B). En tal caso, definimos el producto de A por B de la siguiente manera

$$C = A\cdot B \in \mathcal{M}_{m\times q} \qquad \text{o simplemente} \qquad C = AB\,.$$

donde el elemento c_{ij} de la matriz C es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,.$$

Ejemplo 2.1.7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 7 & \text{-1} & 2\sqrt{2} \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 22 & \text{-1} & 11 \\ 31 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}$, por tanto, A y B son multiplicables y la matriz producto $C = AB \in \mathcal{M}_{2\times 3}$.

El elemento $c_{21} = 31$ de la matriz producto se ha obtenido de la siguiente manera

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0\cdot 5 + 1\cdot 7 + 3\cdot 8\,.$$

Nota 2.1.8 ¿Son multiplicables las matrices B y A? Evidentemente la respuesta es no. Y en el caso de que fueran multiplicables, ¿se verificará $AB = BA$? Veamos algunos ejemplos.

g

Ejemplo 2.1.9

1. Para las matrices A y B del ejemplo 2.1.7 existe el producto AB, mientras que el producto BA no tiene sentido.

2. Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times3}$ y $B \in \mathcal{M}_{3\times2}$, podemos establecer los dos productos AB y BA, pero
$$AB \in \mathcal{M}_{2\times2} \qquad \text{y} \qquad BA \in \mathcal{M}_{3\times3},$$
por lo que las matrices AB y BA no pueden ser iguales.

3. Para que las matrices AB y BA estén ambas en el mismo conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$, necesariamente A y B han de ser matrices cuadradas y del mismo orden.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 11 \\ 16 & 15 & 17 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} .$$
Pero ni siquiera en este caso se tiene necesariamente $AB = BA$. En general se tiene que $AB \neq BA$. Cuando se dé el caso particular $AB = BA$ diremos que esas dos matrices A y B **conmutan**.

Proposición 2.1.10 *El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa:* $(AB)C = A(BC)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $\forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}$.

   Obsérvese que $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $BC \in \mathcal{M}_{n\times q}$ *y* $ABC \in \mathcal{M}_{m\times q}$.

2. *Distributiva respecto a la suma de matrices:* $A(B + C) = AB + AC$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

En lo que sigue, denotaremos $\mathcal{M}_n$ al conjunto de las matrices cuadradas de orden n.

Proposición 2.1.11 *La matriz diagonal*
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es el elemento neutro para el producto de matrices cuadradas de orden n , es decir

$$AI_n = I_nA \quad \forall A \in \mathcal{M}_n \, .$$

Obsérvese que la esta matriz I_n, llamada **matriz identidad**, conmuta con todas las matrices de orden n. Cuando no haya lugar a la confusión escribiremos simplemente I, en lugar de I_n .

Corolario 2.1.12 *$(\mathcal{M}_n, +, .)$ tiene estructura de anillo.*

Demostración. $(\mathcal{M}_n, +)$ tiene estructura de grupo abeliano y el producto verifica la propiedad asociativa y la distributiva con respecto a la suma.

Nota 2.1.13 Veremos más adelante que $(\mathcal{M}_n, +, .)$ no tiene estructura de cuerpo. A pesar de la existencia de elemento neutro para el producto I_n, no todo elemento de $\mathcal{M}_n$ tiene elemento simétrico (o inverso) respecto al producto.

2.1.2 Algunas matrices especiales

Definición 2.1.14 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se llama matriz **traspuesta de** A y se denota A^t a la matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}$ tal que sus filas son las columnas de A.

Ejemplo 2.1.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2} \, , \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{2\times 3} \; .$$

Proposición 2.1.16 *Se verifican las siguientes propiedades*

1. $(A^t)^t \, , \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t \, , \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
3. $(rA)^t = rA^t \, , \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n} \ , \ \forall r \in \mathbb{R}$.
4. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ (multiplicables), entonces $B^t \in \mathcal{M}_{p\times n}$ y $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ (también son multiplicables); además*

$$(AB)^t = B^tA^t \, .$$

Definición 2.1.17 Se dice que una matriz A es **simétrica** si $A = A^t$.

Obsérvese que una matriz simétrica debe ser necesariamente cuadrada.

Definición 2.1.18 Se dice que una matriz A es **antisimétrica** si $A^t = -A$.

Una matriz antisimétrica debe ser necesariamente cuadrada. Además, todos los elementos de la diagonal deben ser nulos.

Definición 2.1.19 Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es **inversible** si existe otra matriz $B \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$AB = BA = I_n\,.$$

A la matriz B se le llama **inversa** de A y se denota $B = A^{-1}$.

Como ya hemos adelantado en la nota 2.1.13, no toda matriz cuadrada va a ser inversible.

Proposición 2.1.20 *Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ son matrices inversibles, entonces la matriz producto AB también es inversible, y su inversa es*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Demostración. Veamos que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, es decir, veamos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n\,.$$

En efecto, usando la asociatividad del producto de matrices obtenemos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n\,.$$

2.2 Determinantes

Definición 2.2.1 Dados los n primeros números naturales $1, 2, \ldots, n$, llamaremos **permutación** de estos n números a una ordenación cualquiera de ellos.

Ejemplo 2.2.2 Para los números 1,2,3 y 4, tenemos las siguientes permutaciones

$$\begin{array}{llllll}
(1,2,3,4)\,, & (1,2,4,3)\,, & (1,3,2,4)\,, & (1,3,4,2)\,, & (1,4,2,3)\,, & (1,4,3,2)\,,\\
(2,1,3,4)\,, & (2,1,4,3)\,, & (2,3,1,4)\,, & (2,3,4,1)\,, & (2,4,1,3)\,, & (2,4,3,1)\,,\\
(3,2,1,4)\,, & (3,2,4,1)\,, & (3,1,2,4)\,, & (3,1,4,2)\,, & (3,4,2,1)\,, & (3,4,1,2)\,,\\
(4,2,3,1)\,, & (4,2,1,3)\,, & (4,3,2,1)\,, & (4,3,1,2)\,, & (4,1,2,3)\,, & (4,1,3,2)\,.
\end{array}$$

En el caso general de n números, tenemos $n!$ permutaciones posibles.

Definición 2.2.3 En una permutación de n elementos, diremos que dos elementos presentan **inversión** si están en orden contrario al natural.

Ejemplo 2.2.4 En la permutación $(4,1,2,3)$ tenemos 3 inversiones: el 4 con el 1; el 4 con el 2; y el 4 con el 3. El 1 con el 2; el 1 con el 3; y el 2 con el 3, están en el orden natural.

Definición 2.2.5 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccl}
Det: & \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & A & \mapsto & Det(A) = |A|
\end{array}$$

donde el número real $|A|$ está formado por $n!$ sumandos, cada uno de ellos de la forma

$$(-1)^k \, a_{1p_1} \, a_{2p_2} \, \ldots \, , a_{np_n}$$

con $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$, y k el número de inversiones de la permutación p.

Obsérvese que en cada sumando hay n factores, de tal forma que en cada uno de ellos aparece un y sólo un elemento de cada fila de A y uno y sólo uno de cada columna de A.

Ejemplo 2.2.6 Utilizaremos la definición anterior para obtener el determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_3$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Según la definición, el determinante debe tener $3! = 6$ sumandos (un sumando por cada permutación de los números 1,2,3), cada uno de ellos con 3 factores, de tal forma que de esos tres factores haya un elemento y sólo uno de cada fila y de cada columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Cada sumando se corresponde respectivamente con las siguientes permutaciones

$$(1,2,3)\,,\;(1,3,2)\,,\;(2,1,3)\,,\;(2,3,1)\,,\;(3,1,2)\,,\;(3,2,1)\,,$$

y, por tanto, los signos de cada sumando son respectivamente

$$+ \qquad - \qquad - \qquad + \qquad + \qquad -$$

A partir de la definición, se pueden obtener diferentes reglas nemotécnicas para obtener el determinante de una matriz. Para el caso de una matriz de orden 3, resulta útil la regla de Sarrus (Pierre-Fréderic: 1798-1861):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Ejercicio 2.2.7 Utilizar la definición 2.2.5 para obtener el determinante de una matriz de orden 2.

Ejercicio 2.2.8 *(Junio 2000)*
Utilizar la definición 2.2.5 para obtener el determinante de la siguiente matriz de orden 10.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$$

Obsérvese que el cálculo del determinante de una matriz mediante la definición, salvo en casos excepcionales como el ejemplo anterior, puede ser tedioso, sobre todo si $n \geq 4$. Para el determinante de una matriz de orden 5 había que obtener $5! = 120$ sumandos ... No es de extrañar, por tanto, que se estudien otras técnicas para su cálculo.
Más adelante veremos algunas de estas técnicas para simplificar el cálculo de determinantes de orden 4 o mayor, antes veamos algunas de las propiedades del determinante de una matriz.

2.2.1 Propiedades de los determinantes

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\mid A^t \mid = \mid A \mid$.

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

   Demostración.- En cada sumando del primer determinante aparece una y sólo una vez un elemento de la fila i-ésima, luego en todos los sumandos aparece una y sólo una vez λ multiplicando y se puede sacar factor común.

   Nota.- $\mid \lambda A \mid = \lambda^n \mid A \mid$.

3. Sea B la matriz que resulta de intercambiar dos filas (o dos columnas) de A. Entonces $\mid B \mid = - \mid A \mid$.

4. Si A tiene dos filas (columnas) iguales, entonces $\mid A \mid = 0$.

   Demostración.- Supongamos que A tiene iguales sus filas i-ésima y j-ésima

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \mid A \mid$$

   y por lo tanto $\mid A \mid = 0$.

5. Si A tiene dos filas (columnas) proporcionales, entonces $\mid A \mid = 0$.

   Demostración.- Supongamos que A tiene las filas i-ésima y j-ésima proporcionales:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nota.- Esta propiedad es cierta para cualquier número finito de sumandos. Se verifica también la propiedad análoga por columnas.

7. Si todos los elementos de una fila (columna) de A valen 0, entonces $\mid A \mid= 0$.

   Demostración.- Inmediata.

8. Sea B la matriz que resulta de sumar a una fila (columna) de A *otra* fila (columna) de A multiplicada por un número real. Entonces $\mid B \mid=\mid A \mid$.

   Demostración.-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & a_{j2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nota.- Este proceso se puede reiterar: si sumamos a una fila (columna) *otras* filas (columnas) multiplicadas cada una de ellas por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al de A. La expresión $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \cdots$ se llama combinación lineal de las filas $F_1, F_2, F_3 \cdots$.

9. $\mid A \mid = 0 \iff$ Una fila de A es c.l. de las *demás* filas de $A \iff$ Una columna de A es c.l. de las *demás* columnas de A.

   Veamos sólo una idea de la demostración:
   $\Longleftarrow$) La hacemos sólo para el de caso $n = 4$ y siendo la cuarta fila combinación lineal de las demás.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} & \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} + \lambda_3 a_{34} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_2 a_{24} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_3 a_{34} \end{vmatrix}$$

   y todos los sumandos valen 0 ya que en cada uno de ellos la cuarta fila es proporcional a otra fila.

   Nota.- Algún λ_l podría ser 0.

Ejemplo 2.2.9

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0\,.$$

Obsérvese que F3=2F2-F1. Por columnas tenemos C3=2C2-C1. En este caso la combinación por filas coincide con la combinación por columnas. Ha sido pura casualidad, en general la combinación por filas no tiene por qué coincidir con la combinación por columnas.

2.2.2 Desarrollo del determinante por los elementos de una fila (columna)

Definición 2.2.10 Sea $A \in \mathcal{M}_n$, se llama menor complementario del elemento a_{ij} y se denota M_{ij} al determinante de la submatriz de A que se resulta de eliminar la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima.

Ejemplo 2.2.11 De los nueve menores complementarios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

mostramos dos de ellos

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -7\,, \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\,.$$

Definición 2.2.12 Se llama adjunto del elemento a_{ij} y se denota A_{ij} al menor complementario M_{ij} cambiado o no de signo según sean i, j.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,.$$

Ejemplo 2.2.13 Para la matriz A del ejemplo anterior 2.2.11 tenemos

$$A_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13}\,, \qquad A_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21}\,.$$

Para una matriz de orden 3 tenemos la siguiente distribución de signos para los adjuntos

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

Proposición 2.2.14 *El valor del determinante de una matriz es igual a la suma de los elementos de una fila (columna) multiplicados, cada uno de ellos, por sus respectivos adjuntos*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} =$$

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\,.$$

Ejemplo 2.2.15 Obtenemos el determinante desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}A_{1j} = 2A_{11} + 0A_{12} - 3A_{13} + 0A_{14}\,,$$

Por lo que sólo será necesario calcular los adjuntos A_{11} y A_{13}.

$$A_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$A_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

Por tanto

$$|A| = 2 \cdot 15 - 3(-16) = 30 + 48 = 78\,.$$

Si hacemos uso de forma adecuada de la propiedad 8 de los determinantes, entonces es posible simplificar aún más los cálculos para obtener el determinante anterior. La idea consiste en transformar la matriz A en otra matriz B mediante la propiedad 8 (recuérdese que la transformación vista en la propiedad 8 deja invariante el determinante de la matriz), de tal manera que la nueva matriz B tenga una fila (columna) con todos sus elementos, excepto uno a lo sumo, nulos. En tal caso sólo será necesario calcular un adjunto: el correspondiente a ese elemento no nulo.

Ejemplo 2.2.16 Utilizaremos la propiedad 8 para hacer ceros en la primera fila de la matriz A del ejemplo 2.2.15. Hemos considerado la primera fila por ser la que más ceros tiene. De hecho, sólo tenemos que hacer cero el elemento a_{13}. Para ello, a la tercera columna le sumamos la primera columna multiplicada por 3/2: $C3 \to C3 + (3/2)C1$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora resulta sencillo calcular el determinante de la matriz B, que coincide con el de la matriz A.

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2\,B_{11} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 78\,.$$

2.2.3 Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada

Hemos visto las propiedades que verifica la terna $(\mathcal{M}_n, +, .)$, concluyendo en el corolario 2.1.12 que tenía estructura de anillo. Quedaba pendiente ver que $(\mathcal{M}_n, +, .)$ no tiene estructura de cuerpo consecuencia de que no todo elemento de $\mathcal{M}_n$ tiene elemento inverso. En la proposición 2.2.18 vamos a ver una condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ sea inversible. Para poder probar ese resultado, necesitamos ver antes la siguiente propiedad sobre el determinante de la matriz producto.

Proposición 2.2.17 *Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$, se tiene que*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Proposición 2.2.18 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es inversible si y sólo si su determinante es no nulo.*

$$\boxed{A \ \ \textit{inversible} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0}$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Si A es inversible entonces existe su matriz inversa A^{-1}, verificándose $AA^{-1} = I_n$ y por tanto,

$$1 = |I_n| = |AA^{-1}| \overset{Prop 2.2.17}{=} |A|\,|A^{-1}|\,,$$

de donde se deduce que $|A|$ no puede ser nulo (si lo fuera, el producto $|A|\,|A^{-1}|$ sería 0 y no 1).

$\Leftarrow$) Si $|A| \neq 0$ entonces podemos considerar la siguiente matriz

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t \tag{2.1}$$

donde los A_{ij} son los adjuntos de la matriz A. La matriz (A_{ij}) se llama **matriz adjunta** de A y se suele denotar $Adj(A)$.

La matriz de (2.1) es la inversa de A, es decir

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t . \qquad (2.2)$$

Para ello basta con efectuar la multiplicación $A\,A^{-1}$ y ver que se obtiene la matriz identidad I (omitimos las cuentas). □

Queda claro entonces que hay matrices en $\mathcal{M}_n$ que no poseen inversa, por lo que la terna $(\mathcal{M}_n, +, .)$ no tiene estructura de cuerpo.

Obsérvese que en la demostración de la proposición 2.2.18, además de hacer la prueba, hemos dado una técnica (2.2) para el cálculo de la inversa (este método se llama cálculo de la inversa por adjuntos).

Ejemplo 2.2.19 Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

utilizando la fórmula (2.2).

En primer lugar habrá que calcular el determinante para ver si la matriz A tiene inversa. En este caso $|A| = -1 \neq 0$, por lo que existe A^{-1}.

Para calcular la inversa por esta técnica hemos de obtener en primer lugar la matriz adjunta, calculando uno a uno los nueve adjuntos que la componen:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Finalmente, de (2.2) obtenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una forma sencilla de comprobar si el resultado obtenido es correcto consiste en efectuar el cálculo AA^{-1}. Por supuesto, se debe obtener la matriz identidad I_n .

Hay otros métodos, además del que proporciona la fórmula (2.2), para calcular la inversa de una matriz. En general no se puede decir qué método es el mejor para calcular la inversa de una matriz, esto puede depender de la dimensión de la matriz y de los coeficientes de la matriz. El método que comentamos a continuación suele ser más eficiente que el anterior, sobre todo si la dimensión de la matriz es grande ($n \geq 4$). Este método está basado en una serie de transformaciones elementales. Estas transformaciones están asociadas a un tipo de matrices que comentamos a continuación.

Matrices elementales

Describimos a continuación una serie de matrices elementales que nos serán útiles para el cálculo de la inversa mediante el llamado método de Gauss que veremos a continuación. Todas ellas son consecuencia de simples transformaciones en la matriz identidad I_n .

P_{ij} : Es la matriz que resulta de intercambiar las filas i y j en la matriz I_n . Mostramos un ejemplo para el caso $n = 3$

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dada una matriz cualquiera $A \in \mathcal{M}_n$, la matriz $P_{ij} \cdot A$ es la matriz que resulta de intercambiar en A las filas i y j .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 40 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dada una matriz cualquiera $A \in \mathcal{M}_n$, la matriz $A \cdot P_{ij}$ es la matriz que resulta de intercambiar en A las columnas i y j .

$$\begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 40 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 6 & \pi & 3 \end{pmatrix}.$$

$P_{ij}(k)$ $(i \neq j)$: Es la matriz que se obtiene si sustituimos en I_n el cero de la posición (i,j) por el número real k. Mostramos un ejemplo para el caso $n = 3$

$$P_{13}(38) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_{ij}(k) \cdot A$ es la matriz que resulta si sustituimos en A la fila i-ésima y en su lugar ponemos la fila i-ésima mas la fila j-ésima multiplicada por k.

$$\text{fila } i\text{-ésima} \xrightarrow{P_{ij}(k)} \text{fila } i\text{-ésima} + k \cdot \text{fila } j\text{-ésima}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 & 40 + 38 \cdot \pi & 231 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot P_{ij}(k)$ es la matriz que resulta si sustituimos en A la columna j-ésima y en su lugar ponemos la columna j-ésima mas la columna i-ésima multiplicada por k.

$$\begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 40 & -35 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 120 \end{pmatrix}.$$

$P_i(k)$ $(k \neq 0)$: Es la matriz que resulta cuando en I_n sustituimos el 1 de la posición (i,i) por el número real k. Mostramos un ejemplo para el caso $n = 3$

$$P_3(-6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$P_i(k) \cdot A$ es la matriz que resulta al multiplicar por k la fila i-ésima de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -18 & -6\pi & -36 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot P_i(k)$ es la matriz que resulta al multiplicar por k la columna i-ésima de A.

$$\begin{pmatrix} -1 & 40 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & \pi & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 40 & -18 \\ 0 & 5 & 12 \\ 3 & \pi & -36 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, hacer una operación del tipo:

1. Intercambiar dos filas (columnas) de una matriz
2. Añadir a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número.
3. Multiplicar a una fila (columna) por un número real

equivale a multiplicar a izquierda (derecha) por una de las matrices elementales descritas anteriormente. Veamos a continuación un ejemplo para mostrar de qué manera podemos utilizar estas ideas para calcular la inversa de una matriz.

Ejemplo 2.2.20 Vamos a realizar sucesivas transformaciones elementales en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

hasta que consigamos transformarla en la matriz identidad I_3. Este proceso no es único, se pueden seguir diferentes caminos. El más utilizado suele ser el que consiste en trabajar por filas (premultiplicando por matrices elementales), haciendo en primer lugar ceros por debajo de la diagonal principal y a continuación ceros por encima de la diagonal principal.

Comenzamos haciendo ceros por debajo del elemento a_{11}, para ello es necesario añadir a la fila 2 la fila 1 multiplicada por 1 ($F2 \to F2 + F1$). Esto equivale a premultiplicar a la matriz A por la matriz elemental $P_{21}(1)$.

$$P_{21}(1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Todos los elementos que quedan por debajo de a_{11} son nulos, por tanto, ya podemos dar el siguiente paso, que consistirá en hacer ceros por debajo del siguiente elemento de la diagonal principal: a_{22}. Para ello añadiremos a la fila 3 la fila 2 multiplicada por -1 ($F3 \to F3 - F2$), lo que equivale a premultiplicar por la matriz elemental $P_{32}(-1)$.

$$P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya hemos conseguido ceros por debajo de la diagonal principal. Para obtener ceros por encima de la diagonal, comenzaremos haciendo ceros por encima del último elemento de la misma a_{33}, y a continuación ceros por encima de a_{22}. Para conseguir un cero en la posición $\square_{23}$, añadiremos a la fila 2 la fila 3 multiplicada por -3 ($F2 \to F2 - 3F3$), lo que equivale a premultiplicar por la matriz elemental $P_{23}(-3)$.

$$P_{23}(\text{-}3)P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para conseguir un cero en la posición $\square_{13}$, añadiremos a la fila 1 la fila 3 multiplicada por -1 ($F1 \to F1 - F3$), lo que equivale a premultiplicar por la matriz elemental $P_{13}(-1)$.

$$P_{13}(\text{-}1)P_{23}(\text{-}3)P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-}1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una vez obtenida la matriz identidad, obsérvese que tenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\underbrace{P_{13}(\text{-}1)P_{23}(\text{-}3)P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)}_{A^{-1}}\,A = I_3\,.$$

Por tanto, el producto de las matrices elementales empleadas en la transformación es la inversa de la matriz A.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-}1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \text{-}3 \\ 4 & 3 & \text{-}3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Este último paso de multiplicar las cuatro matrices elementales no es necesario si tenemos en cuenta quiénes y cómo son estas matrices. Evidentemente se tiene que

$$P_{13}(\text{-}1)P_{23}(\text{-}3)P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)\ I_3 = P_{13}(\text{-}1)P_{23}(\text{-}3)P_{32}(\text{-}1)P_{21}(1)\,,$$

luego, si aplicamos a la matriz I_3 las mismas transformaciones (y en el mismo orden) que hemos efectuado con la matriz A, obtenemos el producto de esas matrices elementales, es decir la inversa de la matriz A.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{P_{21}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{P_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix} \overset{P_{23}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \text{-}3 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{P_{13}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \text{-}3 \\ 4 & 3 & \text{-}3 \end{pmatrix} = A^{-1}\,.$$

Nota 2.2.21 Recuérdese que en el método de adjuntos, para calcular de la inversa, se calcula en primer lugar el determinante de la matriz A. Si este determinante es no nulo, sabemos que existe A^{-1} y entonces continuamos los cálculos. Con el método que acabamos de mostrar para calcular la inversa, si ésta no existiera, durante el proceso obtendríamos una matriz con una fila de ceros y no podríamos continuar.

Nota 2.2.22 En la práctica, en lugar de transformar la matriz A en la matriz I_n y a continuación utilizar las mismas transformaciones elementales para pasar de I_n a la matriz A^{-1}, como hemos hecho en el ejemplo anterior, se suelen efectuar ambas transformaciones de forma simultánea haciendo uso de la siguiente notación:

$$(\,A\,|\,I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{P_{21}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{P_{32}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}1 & \text{-}1 & 1 \end{array}\right) \overset{P_{23}(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & \text{-}3 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}1 & \text{-}1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{P_{13}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & \text{-}3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & \text{-}3 \end{array}\right) = (\,I_3\,|\,A^{-1})\,.$$

Nota 2.2.23 Obsérvese que el proceso anterior puede efectuarse también por columnas, lo que equivaldría a postmultiplicar por matrices elementales en lugar de premultiplicar. Lo que no puede hacerse es alternar transformaciones elementales por filas con transformaciones elementales por columnas: Toda la transformación ha de hacerse por filas (y sólo por filas) o por columnas (y sólo por columnas).

2.3 Sistemas de ecuaciones lineales

2.3.1 Definiciones

Ecuaciones

Una ecuación lineal con n incógnitas tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{2.3}$$

donde los $a_i \in \mathbb{R}$ se llaman coeficientes de la ecuación, $x_i \in \mathbb{R}$ son las incógnitas y $b \in \mathbb{R}$ se llama término independiente. En el caso particular $b = 0$, la ecuación se dice homogénea.

Diremos que $(r_1, r_2, \ldots, r_n)^t$ es una solución de la ecuación si

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = b$$

Resolver la ecuación (2.3) significa encontrar todas sus soluciones. La solución de una ecuación es el conjunto formado por todas sus soluciones.

Ejemplo 2.3.1 La solución de la ecuación

$$3x + 2y = 1$$

es

$$S = \{\ (\alpha, -3\alpha/2 + 1/2)^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\ \}.$$

Cualquier elemento de S, por ejemplo $(1, -1)^t$, es una solución de la ecuación.

Sistemas

Un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{2.4}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$, se llama sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal. Los a_{ij} son los coeficientes del sistema y los b_i se llaman términos independientes.

Diremos que $(r_1, r_2, \dots, r_n)^t$ es una **solución** del sistema (2.4) si

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}r_1 & + & a_{12}r_2 & + & \dots & + & a_{1n}r_n & = b_1 \\ a_{21}r_1 & + & a_{22}r_2 & + & \dots & + & a_{2n}r_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}r_1 & + & a_{m2}r_2 & + & \dots & + & a_{mn}r_n & = b_m\,, \end{array}\right.$$

es decir, si es solución de todas las ecuaciones.

Resolver el sistema (2.4) significa encontrar todas sus soluciones. Antes de resolver un sistema conviene hacer un estudio sobre las posibles soluciones que pueda tener un sistema (ninguna, una, ... ,infinitas, ...).

Discutir el sistema (2.4) consiste en analizar si posee o no soluciones y, en su caso, decir cuántas hay. En función de este análisis, los sistemas se clasifican en

$$\left\{\begin{array}{ll} \textsf{Incompatibles}: & \text{no existe solución} \\ \textsf{Compatibles}: & \text{existe solución} \left\{\begin{array}{l} \textsf{Determinados}: \text{solución única} \\ \textsf{Indeterminados}: \text{infinitas soluciones} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

El sistema (2.4) se dice **homogéneo** si todos los términos independientes son nulos, es decir, $b_i = 0,\ i = 1, \dots, m$. Obsérvese que el vector $(0, \overset{n}{\dots}, 0)^t$ es solución de un sistema homogéneo. Por tanto, podemos afirmar que todos los sistemas homogéneos son compatibles.

A veces resulta más cómodo utilizar notación matricial para escribir el sistema anterior (2.4). En tal caso podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o bien

$$AX = b\,, \tag{2.5}$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es el vector de incógnitas y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ es el vector independiente.

2.3.2 Sistemas de Cramer

Definición 2.3.2 Llamamos sistema de Cramer a un sistema lineal en el que $m = n$, es decir, el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones y, además, la matriz de coeficientes A tiene determinante no nulo.

Obsérvese que en la definición anterior, por ser $m = n$, la matriz de coeficientes es cuadrada, y por tanto tiene sentido hablar de su determinante. La condición de determinante no nulo, como ya hemos visto, equivale a decir que la matriz A tiene inversa A^{-1}. Precisamente, si multiplicamos a izquierda por la matriz inversa A^{-1} en la igualdad (2.5) obtenemos

$$X = A^{-1}b\,. \tag{2.6}$$

Acabamos de probar que un sistema de Cramer tiene solución única (compatible determinado), y que la solución viene dada dada por (2.6). En tal caso, para obtener la solución es necesario calcular la inversa de la matriz A, lo que es excesivamente laborioso. A continuación vemos una técnica para obtener X sin necesidad de calcular la inversa.

Partiendo de (2.6), y teniendo en cuenta el cálculo de la inversa por adjuntos, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que

$$X_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \cancel{a_{i1}}b_1 & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{1n} & \ldots & \cancel{a_{in}}b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{i1} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{1n} & \ldots & a_{in} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 2.3.3 Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & + & z & = 2 \\ x & - & 3y & + & 2z & = 0 \\ 3x & - & y & - & z & = 2 \end{array} \right.$$

En primer lugar, comprobamos que se trata de un sistema de Cramer, esto es, $|A| = 11 \neq 0$. A continuación, hacemos uso de la fórmula anterior para obtener directamente cada componente de la solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{11}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{11}.$$

Finalmente escribimos la solución

$$Sol = \left(\frac{12}{11}, \frac{8}{11}, \frac{6}{11} \right)^t.$$

Nota 2.3.4 Para los sistemas de dimensión $n \geq 4$, la técnica anterior es poco recomendable. Veremos más adelante otro método más adecuado para sistemas "grandes".

2.3.3 Sistemas equivalentes

El siguiente método para resolver sistemas lineales está basado en los sistemas equivalentes.

Definición 2.3.5 Dos sistemas lineales se dicen equivalentes si toda solución del primer sistema lo es también del segundo y viceversa, es decir, tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo 2.3.6 Comprobar que los sistemas siguientes son equivalentes

$$1)\left\{\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ -x+3y=2 \end{array}\right. \qquad\qquad 2)\left\{\begin{array}{rr} 3x+ & 2y=1 \\ & +11y=7 \end{array}\right.$$

De los dos sistemas del ejemplo anterior 2.3.6, ¿cuál te parece más fácil de resolver? El método de Gauss (eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás) consiste básicamente en transformar el sistema original en otro equivalente que sea más fácil de resolver.

Las siguientes transformaciones convierten a un sistema lineal en otro equivalente.

$T1$. Intercambiar dos ecuaciones.

$T2$. Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.

$T3$. Añadir a una ecuación, otra ecuación multiplicada por un número real.

$T4$. Suprimir o añadir una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

MÉTODO DE GAUSS

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

Ejemplo 2.3.7 Determinar las transformaciones que hay que efectuar para pasar del sistema 1) del ejemplo 2.3.6 al sistema 2).

En el ejemplo 2.3.6, resolver el sistema 2) es sencillo debido a que tiene cierta estructura que nos permite despejar directamente una incógnita y sustituyendo su valor en la ecuación anterior, despejar también de modo inmediato la siguiente incógnita.

Definición 2.3.8 Un sistema lineal $AX = b$ se llama triangular si la matriz A es triangular.

El método de Gauss consiste en aplicar al sistema lineal sucesivas transformaciones que lo convierten en uno equivalente hasta llegar a un sistema triangular, que se resuelve inmediatamente. En la práctica se escribe la matriz ampliada $(A \,|\, b)$ y se hacen ceros bajo la diagonal siguiendo una estrategia análoga a la utilizada para el cálculo de la inversa de una matriz.

Ejercicio 2.3.9 Utilizar el método de Gauss para resolver el sistema del ejemplo 2.3.3.

Nota 2.3.10 El método de Gauss puede usarse también para estudiar y en su caso resolver sistemas en los que la matriz A no sea cuadrada.

2.3.4 Rango de una matriz

En las tres técnicas utilizadas hasta ahora para la resolución de un sistema lineal hemos tratado con sistemas de Cramer. Por tanto, antes de resolver el sistema ya sabíamos que era compatible y determinado. En general, para un sistema lineal arbitrario

1. Discutiremos el sistema.

2. Si procede, resolveremos el sistema.

El concepto de rango buscar juega un papel importante en la discusión de un sistema. Antes veamos qué es un menor de una matriz.

Definición 2.3.11 Dada una matriz A, llamaremos menor de orden p de A al determinante de cualquier submatriz de A cuadrada de orden p.

Observemos que el menor complementario del elemento a_{ij} de $A \in \mathcal{M}_n$ es un menor de orden $n - 1$.

Definición 2.3.12 El rango de una matriz A es el número natural p que verifica

- Existe algún menor de A de orden p no nulo.

- Todos los menores de A de orden mayor que p son nulos.

Ejercicio 2.3.13 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

haciendo uso de la definición anterior.

Ejercicio 2.3.14 Calcular el rango de una matriz triangular superior (no necesariamente cuadrada).

Una técnica para calcular el rango de una matriz A consiste en efectuar transformaciones en A que mantengan el rango. Se trata de transformar A en otra matriz B cuyo rango sea más fácil de calcular. Las siguientes operaciones mantienen el rango de una matriz A, y son resultado de las propiedades de los determinantes.

$R1$. Intercambiar dos filas de A.

$R2$. Multiplicar una fila por un número no nulo.

$R3$. Sustituir una fila por ella más un número real multiplicado por otra fila.

$R4$. Eliminar una fila combinación lineal de las demás.

$R5$. Eliminar una fila de ceros.

$R6$. Eliminar una fila proporcional a otra.

$R7$. Todo lo anterior para columnas.

Ejercicio 2.3.15 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 1 & -7 \\ -1 & 10 & -4 & 0 & -9 \\ -1 & 17 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mediante transformaciones que mantienen el rango.

2.3.5 Discusión de un sistema (T. Rouché-Fröbenius)

Consideremos el sistema lineal

$$AX = b\,. \tag{2.7}$$

donde

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes.

$X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es el vector de incógnitas.

$b \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es el vector de términos independientes.

$(A\,|\,b) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$ es la matriz ampliada.

Teorema 2.3.16 *El sistema lineal (2.7) de m ecuaciones y n incógnitas es compatible si y sólo si*

$$\boxed{\textit{rango}\ (A) = \textit{rango}\ (A\,|\,b)} \tag{2.8}$$

Si, además, el rango anterior coincide con n, el número de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única. En otro caso, si rango (A) = rango $(A\,|\,b) < n$, el sistema tiene infinitas soluciones.

Nota. Como siempre se tiene que $r(A) \leq r(A\,|\,b)$, en (2.8) se está diciendo que cuando $r(A) < r(A\,|\,b)$, el sistema (2.7) es incompatible.

Ejercicio 2.3.17 Utilizar el teorema 2.3.16 para discutir el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 4y + 6z - 2t + 5u &=& 1 \\ -x + 3y - 5z + t - 7u &=& 9 \\ -x + 10y - 4z - 9u &=& -2 \\ -x + 17y - 3z - t + 4u &=& 5 \end{array}\right.$$

2.4 Problemas del capítulo 2

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Efectuar, cuando sea posible las siguientes operaciones: AB, BA, CD, DC, $A(BC)$, $(A+B)C$, $(A+B)D$, $D(A+B)$, $A+CD$, $B+DC$

2. Hallar las matrices A y B, ambas de orden 2×3 ,que verifican

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 \\ -3 & -8 & 13 \end{pmatrix}, 5A - 3B = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 \\ -5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Comprobar que $AB = AC$.¿Qué conclusión se puede obtener?

4. Probar que el producto de dos matrices $n \times n1$ triangulares superiores es una matriz triangular superior. ¿Es triangular el producto de dos matrices triangulares?

5. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$. ¿Se puede concluir que $A = 0$?

6. (a) Demostrar que si A es una matriz cuadrada cualquiera, el producto AA^t es una matriz simétrica.

   (b) Demostrar que si B es una matriz antisimétrica, entonces B^2 es una matriz simétrica.

7. Comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

   es la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Demostrar:

   (a) $(A^{-1})^{-1} = A$

   (b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

   (c) $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$

9. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden. Estudiar si son ciertas las siguientes igualdades:

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

10. Demostrar:

    (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ n \geq 1$$

    (b)
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

11. Una matriz A cuadrada se dice idempotente si $A^2 = A$. Probar que si A es idempotente y posee inversa, entonces A es la matriz identidad.

12. Una matriz A cuadrada de orden n, se dice nilpotente de índice k si:
$$A \neq 0, \quad A^2 \neq 0, \cdots\cdots, A^{k-1} \neq 0, \quad A^k = 0$$
Sea A una matriz cuadrada de orden n y nilpotente de índice 3, I la matriz identidad de orden n. Demostrar que $(I + A + A^2) = (I - A)^{-1}$.

13. Demostrar sin desarrollar el determinante que:
$$\begin{vmatrix} 1 & a & c+b \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

14. Comprobar sin desarrollar que el determinante de A es múltiplo de 9 y el de B de 15, siendo:
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 14 \\ 3 & 18 & 0 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

15. Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica y de orden impar es nulo.

16. Demostrar que:
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

17. Calcular los siguientes determinantes:
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}, \quad |D| = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a & a \\ a & a+b & a & a & a \\ a & a & a+b & a & a \\ a & a & a & a+b & a \\ a & a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

18. Mediante operaciones de columnas, verificar que el determinante de Vandermonde de orden 3 vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

19. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 5 & -4 \\ x^2 & 4 & 25 & 16 \\ x^3 & -8 & 125 & -64 \end{vmatrix} = 0$$

20. Demostrar que el determinante de una matriz triangular (inferior o superior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

21. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontrar aplicando la definición de determinante el único término no nulo que aparece en el desarrollo de $|A|$.

22. Calcular el determinante de una matriz de orden n en la que el elemento de la fila i y columna j es $i+j$.

23. Calcular el valor de $|2A|$, $|-A|$, $|A^2|$ sabiendo que $|A| = 5$.

24. Sea una matriz cuadrada en la que los elementos de la primera columna son todos iguales a 1. Si llamo D al valor de su determinante, obtener en función de D el determinante de las siguientes transformaciones de la matriz original

    (a) Se suma 2 a todos los elementos de la primera columna.

    (b) Se suma 2 a todos los elementos de la segunda columna.

    (c) Se multiplica por 2 a todos los elementos de la matriz.

25. Calcular, si existen, las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 9 & 6 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{pmatrix}$$

26. Resolver utilizando la regla de Cramer y el método matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + z + 2t = -3 \\ 3x + 5y + 3z + 5t = -6 \\ 6x + 5y + z + 5t = -8 \\ 3x + 5y + 3z + 7t = -8 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{array} \right. \qquad d) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{array} \right.$$

$$e) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{array} \right. \qquad f) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 4z + 8t = -7 \\ 3x + y - 6z + 2t = -18 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 13 \\ 2x - y + 2z = 7 \end{array} \right.$$

27. Discutir y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas por el método de triangularización:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ x + 8y - 7z = 12 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{array} \right. \qquad d) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{array} \right.$$

$$e) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 7z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 0 \end{array} \right. \qquad f) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 5z + 7t = 0 \\ -2x + 4y + 7z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - 5t = 0 \end{array} \right.$$

28. Discutir y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas, en función de los parámetros

$$a) \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} 2x - my + 4z = 0 \\ x - y + 7z = 0 \\ mx - y + 13z = 0 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 2x + (2-a)y = 0 \\ 2(a+1)x + ay + 2z = 2a - 2 \\ (a+1)x + (a+1)z = a - 1 \end{array} \right. \quad d) \left\{ \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = b \end{array} \right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{l}(1+a)x+y+z=1\\ x+(1+a)y+z=a\\ x+y+(a+1)z=a^2\end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{l}ax+y+z+t=1\\ x+ay+z+t=1\\ x+y+az+t=1\\ x+y+z+at=1\end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{l}2x+3y+z+2t=3\\ 4x+6y+3z+4t=5\\ 6x+9y+5z+6t=7\\ 8x+12y+7z+at=9\end{array}\right.$$