1 Sistemas lineales, matrices y determinantes

Ejercicio 1.1 .– Resolver los sistemas lineales siguientes

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 1.2 .– Discutir y resolver, según los valores de los parámetros (α, β), los sistemas lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2u + 4v + \beta w + 2z = 6 \\ 3v + 3w + z = 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z = 8 \\ \alpha u + 6w + 5z = -4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ \beta x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 1.3 .– Discutir y resolver, según los valores del parámetro γ, el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma x + y + z = 1 \\ x + \gamma y + z = \gamma \\ x + y + \gamma z = \gamma^2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 1.4 .– Consideramos el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3u = -1 \\ x - y + z + u = 1 \\ 2x + y + z - 2u = 0 \\ 3x + 2z - u = 1 \\ 3y - z - 4u = -2 \end{array}\right.$$

a. Expresa todas las posibles soluciones del sistema lineal homogéneo asociado al anterior como combinación lineal de vectores libres.

b. Comprueba que $x = 1$, $y = 5$, $z = 1$, $u = 4$ es solución del sistema original y expresa, sin realizar cálculos adicionales, todas las soluciones del sistema original.

c. Comprueba que los vectores que has obtenido en el apartado anterior son, efectivamente, soluciones del sistema original.

Ejercicio 1.5 .– Demuestra que el sistema

$$\begin{array}{l} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{array}$$

es compatible indeterminado si y sólo si $ab - cd = 0$.

Ejercicio 1.6 .– ¿Cuántos vectores libres pueden escogerse como máximo del conjunto $\{(1,0,1,0), (2,1,3,1), (0,1,1,1), (2,2,4,2), (-1,0,0,3)\}$?

Ejercicio 1.7 .– Calcula el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & -9 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.8 .– Determina, según el valor del parámetro a, el rango de las siguientes matrices y calcula su inversa en los casos favorables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \; a \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.9 .– Sea L una matriz triangular inferior 3×3

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

con a, c y f no nulos. Observando el procedimiento (Gauss–Jordan) de cálculo de la inversa de una matriz, ¿por qué podemos asegurar que L tiene inversa? Demuestra que además L^{-1} también es triangular inferior. Enuncia el resultado correspondiente para matrices triangulares inferiores $n \times n$.

Ejercicio 1.10 .– Calcula, si es posible, la descomposición LU de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.11 .– Resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 12 \\ 5x - 6y + 2z &= -1 \\ -4x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

empleando la descomposición LU de la matriz de coeficientes

Ejercicio 1.12 .– Da un ejemplo de dos matrices P y Q que se puedan multiplicar a izquierda y derecha (es decir, de forma que se puedan calcular PQ y QP), pero tales que PQ y QP sean matrices de distinto tamaño.

Ejercicio 1.13 .– Da un ejemplo de matrices 2×2, P y Q tales que $PQ \neq QP$. Por tanto, el producto de matrices 2×2 no es conmutativo (basta con que falle un caso).

Ejercicio 1.14 .– Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula AB y $A^2 = AA$. ¿Qué puedes deducir de estos ejemplos en contraste con la multiplicación de números reales?

Ejercicio 1.15 .– Prueba que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Ejercicio 1.16 .– Calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.17 .– Si $B = M^{-1}AM$, probar que $|A| = |B|$.

Ejercicio 1.18 .– Da un contraejemplo a $|A+B| = |A| + |B|$.

Ejercicio 1.19 .– Calcula la inversa del siguiente producto de matrices elementales (3×3)

$$P = P_{2\,1}(1)P_{2\,3}P_{3\,2}(-1)Q_2(2)$$

de dos formas:

a. realizando el producto y calculando la inversa por Gauss–Jordan;

b. aplicando las propiedades teóricas que conozcas sobre inversa del producto e inversas de las matrices elementales.

Calcula el determinante de P igualmente de dos formas: directamente y con propiedades de determinantes de las matrices elementales.