Práctica 3

Forma canónica de Jordan.

Contenido:

Matrices semejantes. Polinomio característico. Valores propios. Vectores propios. Forma canónica de Jordan. Forma real de la forma canónica de Jordan. Aplicaciones: potencia de una matriz, resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

3.1 Definiciones

Dos matrices cuadradas A y B sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se dicen **semejantes** si existe una matriz regular P tal que $P^{-1}\,A\,P = B$, o bien, equivalentemente, si

$$A\,P = P\,B.$$

Observar que las matrices A y B corresponden al mismo endomorfismo en dos bases relacionadas por la matriz de cambio P.

Se denomina **polinomio característico** de una matriz cuadrada A al determinante

$$\mathrm{Det}\,(\lambda\,I - A)$$

y **ecuación característica** a la ecuación

$$\mathrm{Det}\,(\lambda\,I - A) = 0$$

Se denominan **valores propios**, λ, o autovalores de una matriz A a las raíces de la ecuación característica:

$$\mathrm{Det}\,(\lambda\,I - A) = 0$$

Para calcular los valores propios puede, simplemente, encontrarse las raíces del polinomio. Si ellas son enteras, no es gran problema, ya que serán divisores del término independiente. Si son irracionales el problema puede ser grave, y para ello hay métodos específicos.

Los **vectores propios** o autovectores de una matriz asociados a un valor propio son las soluciones del sistema lineal:

$$(\lambda\,I - A)\,X = 0$$

es decir, el núcleo de la aplicación lineal de matriz $(\lambda\,I - A)$.

El conjunto de vectores anterior se denomina **subespacio fundamental** o subespacio propio asociado al valor propio λ.

Para encontrarlo solo hace falta resolver el sistema particularizando para cada valor propio. Téngase en cuenta que, si el valor propio es complejo, los vectores propios asociados pueden tener coordenadas complejas.

Una matriz cuadrada A de orden n se dice **diagonalizable** si se puede encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios o, equivalentemente, si la suma de dimensiones de los subespacios fundamentales (multiplicidades geométricas) es igual a n.

3.1.1 Comandos de MATLAB

El comando `poly(A)` de MATLAB da los coeficientes del polinomio característico de la matriz A. Si se dispone del "Symbolic Toolkit", y si previamente se ha definido la matriz B como simbólica, es decir, `B = sym(A)`, entonces el comando `poly(B)` determina el polinomio característico en modo funcional. Lo mismo ocurre con otras funciones de matrices, como `det`, `trace`, `menores`, etc.

Hay dos formas de calcular los valores propios de una matriz con MATLAB La primera con `roots(poly(A))`, la segunda con `eig(A)`, esta segunda forma, además, nos proporciona vectores propios asociados a los valores propios correspondientes.

3.2 Forma canónica de Jordan

Dada una matriz A de orden n sobre $\mathbb{R}$, sea diagonalizable o no, siempre se puede encontrar su forma canónica de Jordan (si se elige el cuerpo adecuado), o en otras palabras, dado un endomorfismo h de $\mathbb{R}^n$, siempre se puede encontrar una base respecto de la cual la matriz coordenada de h es la matriz o forma canónica de Jordan. Como es conocido, la forma o matriz de Jordan es una matriz triangular por bloques de Jordan, cuyo número y tamaño están determinados por el endomorfismo h. La base (de Jordan) correspondiente a la matriz de Jordan de h es una base constituida por cadenas del tamaño de los bloques de Jordan correspondientes asociados a los mismos valores propios. Obsérvese que, si dicha base está formada únicamente por vectores propios, entonces la matriz es diagonalizable y la forma de Jordan será una matriz diagonal.

La matriz que define el cambio de la base inicial a la de Jordan es la matriz P que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de las cadenas respecto de la base inicial. Esta matriz verifica la relación de semejanza entre la matriz inicial A y la de Jordan J, en la forma:

$$A\,P = P\,J$$

Recordamos que las cadenas que aquí se deben usar cumplen:

$$(A - \lambda\, I)\, v_{j+1} = v_j, j = 1, 2, \ldots$$

para los diferentes valores propios λ.

3.2.1 Proceso de construcción

El proceso para encontrar la matriz de Jordan y la base de Jordan correspondiente puede ser el siguiente:

- Calcular valores propios con su multiplicidad.
- Realizar la partición de multiplicidades de cada uno de los valores propios (es decir, encontrar cuántos bloques de Jordan y de qué tamaño hay para cada valor propio, o también, encontrar cuántas cadenas hay y de qué tamaño son).
- Encontrar la matriz de Jordan (se sugiere ordenar los bloques de Jordan de mayor a menor tamaño, primero los complejos)
- Encontrar los vectores de cada cadena y, en consecuencia, la base de Jordan.
- Encontrar la matriz de cambio a la base de Jordan
- Comprobar la semejanza de la matriz inicial y la de Jordan.

3.2.2 Ejemplo práctico

Encontrar la forma canónica de Jordan del endomorfismo cuya matriz coordenada respecto de una base conocida es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Definimos la matriz A:

```
>> A=[1,0,0;1,0,1;0,1,0];
```

Con el comando `[v,d]=eig(A)` se encuentran los vectores propios y los valores propios correspondientes, que se localizan en las columnas de las matrices v y d, respectivamente:

```
>> [v,d] = eig(A)

v =
      0         0  0.0000
 0.7071    0.7071  0.7071
 0.7071   -0.7071  0.7071

d =
 1   0  0
 0  -1  0
 0   0  1
```

así tenemos los valores propios: $t_1 = 1$, doble; $t_2 =$ -1, simple.

Partición de multiplicidades. Se estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$, así como de sus sucesivas potencias (a lo más, hasta la multiplicidad del valor propio). En nuestro caso:

```
>> ax1=A-d(1,1)*eye(3);

>> rref(ax1)
```

```
ans=
 1  0   0
 0  1  -1
 0  0   0
```

```
>> dimker1 =3-rank(ax1)
```

```
dimker1=
1
```

Por lo tanto, la matriz de Jordan tendrá un solo bloque de Jordan de orden 2 asociado a t_1; y un solo bloque de Jordan de orden 1 asociado a t_2, es decir,

```
>> J = [d(1,1)*eye(2),zeros(2,1);zeros(1,2),d(2,2)*eye(1)];
>> J(1,2)=1;J
```

```
J=
 1  1   0
 0  1   0
 0  0  -1
```

La base de Jordan estará compuesta, en consecuencia, por dos cadenas, la primera con dos vectores, v1 y v2, donde v2 $\in (\ker((A-t_1I)^2) \setminus \ker(A-t_1I))$ y v1=A v2; y la segunda con uno solo, v3.

```
>> null(ax1)
```

```
ans=
      0
 0.7071
 0.7071
```

```
>> ax12=ax1^2;
>> null(ax12)
```

```
ans=
 -0.9428       0
 -0.2357  0.7071
  0.2357  0.7071
```

```
>> v2=ans(:,1);
>> v1=ax1*v2;
>> v3=v(:,2);
```

La matriz, P, del cambio de la base inicial a la de Jordan tiene por columnas las coordenadas respecto de la base inicial de los vectores de las cadenas en el orden que aparecen

```
>> P=[v1,v2,v3]
```

```
P=
       0  -0.9428        0
 -0.4714  -0.2357   0.7071
 -0.4714   0.2357  -0.7071
```

Comprobación: ver que las matrices A y J son semejantes:

```
>> A*P==P*J
```

```
ans=
```

```
1  1  1
1  1  1
1  1  1
```

3.2.3 Ejercicios

1. Encontrar la forma canónica de Jordan y la matriz del cambio de base de las matrices A y B siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 1/2 & 3 & 1/2 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1/2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 & 2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar la forma canónica de Jordan y la matriz del cambio de base de las matrices C y D siguientes

$$C = 1/4 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Forma real de la forma canónica de Jordan

En ocasiones, algunos de los valores propios de una matriz son complejos; como no siempre se puede utilizar aritmética compleja, se hace preciso considerar la forma real de la forma canónica de Jordan. Entonces se actua en la forma que se propone a continuación.

Proceso (cf. Merino y Santos, pag. 229):

- Ordenar los bloques (primero los complejos, luego los reales) y sustituir los bloques de Jordan del mismo tamaño asociados a un valor propio complejo λ y a su conjugado por un bloque real constituido por bloques B_1 en la diagonal y bloques B_2 encima de la diagonal, siendo

$$B_1 = \begin{pmatrix} Re(\lambda) & -Im(\lambda) \\ Im(\lambda) & Re(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Nota: Se puede usar `[v,d]=CDF2RDF(v,d)` para transformar la salida compleja de `[v,d]=eig(a)` en real.

- La base correspondiente a esta forma de la matriz de Jordan se consigue de la manera siguiente: se colocan en la primera y segunda posiciones, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de los vectores propios complejos correspondientes.

- La relación de semejanza que ha de cumplirse es, como otras veces,

$$A\,P = P\,J$$

3.3.1 Ejercicios

1. Encontrar la forma real de la matriz de Jordan y la matriz del cambio de base correspondientes a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(cf. Merino y Santos, pag. 232)

2. Encontrar la forma real de la matriz de Jordan y la matriz del cambio de base correspondientes a la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
(cf. Merino y Santos, pag. 256)

3.4 Aplicaciones

3.4.1 Potencia de matrices

Dado que una matriz cuadrada A y su forma canónica de Jordan J verifican: $A = P^{-1}\,J\,P$, la potencia n-ésima de A se puede obtener en la forma:

$$A^n = P^{-1}\,J\,P\,P^{-1}\,J\,P\ldots P^{-1}\,J\,P = P^{-1}\,J^n\,P.$$

En consecuencia, basta encontrar la forma canónica de Jordan de A y la matriz de cambio a la base de Jordan.

3.4.2 Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales representa un problema en el que la incógnita es una función vectorial definida como una relación lineal entre ella y su derivada, más concretamente, se puede escribir en términos matriciales como:

$$X' = A\,X$$

Se puede probar que, si se conoce el valor de la solución $X(t_0)$ en un instante t_0 (condiciones iniciales), existe una única solución.

Para encontrar la solución correspondiente a las condiciones iniciales $X(t_0)$ se procede en la forma siguiente:

a) Se encuentra la forma canónica de Jordan y la matriz de paso

b) Se transforma el sistema inicial al siguiente: $Y' = J\,Y$, siendo

$$J = P^{-1}\,A\,P \quad \text{y} \quad X = P\,Y$$

c) Se resuelve el sistema diferencial lineal en forma regresiva

d) Se imponen las condiciones iniciales: $Y_0 = P^{-1}\,X_0$ para determinar las constantes de integración

e) Se realiza el cambio de coordenadas inverso para obtener: $X = P\,Y(t)$.

Ejercicios

1. Resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cuyas matrices y condiciones iniciales son las siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$