ALGEBRA (Ingeniería Química)

9 de Febrero de 2009 — Primera convocatoria

Prueba de problemas (75%)

1. (1.25 ptos) Determinar cuáles de los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo con las operaciones indicadas:

   (a) El conjunto de los números naturales, con la suma.

   (b) El conjunto de los numeros enteros pares, con la suma.

   (c) El conjunto de los numeros enteros impares, con el producto.

   (d) El conjunto $[0, 1]$ con el producto.

   (e) El conjunto $(0,1)$ con el producto.

2. (2.25 ptos) Sea $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de ambos espacios es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Justificar cuales son los valores de k y l.

   (b) Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal.

   (c) Calcular la matriz B de la aplicación lineal en las bases:

$$B_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \;\; y \;\; B_2 = \{(1,0), (1,1)\}$$

   (d) Encontrar dos matrices P y Q tales que $B = QAP$

   (e) ¿Es f suprayectiva?. ¿Es un isomorfismo?.

3. (1.5 ptos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Discutir qué valores de $a \in \mathbb{R}$ hacen A diagonalizable en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{C}$?.

   (b) Para $a = 1$ determinar una matriz de Jordan J y una matriz P tales que $A = P\,J\,P^{-1}$.

4. (1.5 ptos) Sean (V, f) un espacio euclídeo y $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un sistema de vectores ortogonales, no nulos de V. Probar:

   (a) $\forall a \in \mathbb{R} < a_1, a_2, \ldots, a_m >, \;\; a = \dfrac{f(a, a_1)}{f(a_1, a_1)} a_1 + \cdots + \dfrac{f(a, a_m)}{f(a_m, a_m)} a_m.$

   (b) $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ es un sistema libre de V.

   (c) Si $m = dimV$, cada vector de V se escribe de modo único en la forma dada en el apartado a).

5. (1 pto) Clasificar la forma cuadrática:

$$Q(x, y) = -x^2 + \alpha xy - y^2$$

   según los valores del parámetro α.

Cuestión Práctica

1ª–Convocatoria; 9–II–2009

Sean el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^4$ y los subespacios

$$S_1 = \mathbb{R}\langle a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4\rangle \qquad \text{y} \qquad S_2 = \mathbb{R}\langle b_1,\, b_2\rangle.$$

Considera los siguientes cálculos realizados en MatLab:

```
>> a1=[1 2 1 -1]'; a2=[1 1 3 1]'; a3=[1 2 -6 -4]'; a4=[2 1 1 1]';
>> b1=[-1 0 -5 -3]'; b2=[1 0 2 1]';

>> rref([a1 a2 a3 a4])
ans =
       1         0         0        -2
       0         1         0         3
       0         0         1         1
       0         0         0         0
>> rref([b1 b2])
ans =
       1         0
       0         1
       0         0
       0         0
>> rref([a1 a2 a3 a4 b1 b2])
ans =
       1         0         0        -2         1         0
       0         1         0         3        -2         0
       0         0         1         1         0         0
       0         0         0         0         0         1
```

Sin hacer ningún cálculo adicional, resuelve **de forma razonada** las siguientes cuestiones:

1. Determina una base de los subespacios S_1 y S_2.
2. Halla los subespacios $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$.
3. Estudia si $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$.
4. Halla un subespacio S_3 tal que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_3$.
5. Considera la familia de vectores $\mathcal{A} = \{a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, b_1,\, b_2\}$. Calcula una familia $\mathcal{B}$ que sea libre y genere el mismo subespacio que $\mathcal{A}$. Determina cuáles son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{A}$ respecto de la familia $\mathcal{B}$.

(2.5 puntos)

1.25 ptos 1-/ 0.25 a) $(\mathbb{N},+)$ Asociativa
El. neutro 0
El. simétrico $\nexists$

0.25 c) $(\mathbb{Z}_{2n},+)$ Si

0.25 d) $(\mathbb{Z}_{2n+1},+)$ No op. interna $3+3=6$

0.25 e) $([0,1],\cdot)$ op. interna, Asoc., El. neutro 1, El. inverso $\underline{NO}$ $\frac{1}{0}$

0.25 f) $((0,1),\cdot)$ El. neutro 1. $\underline{NO}$

2.25 2) $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\3&0&2&0\end{pmatrix}$

a) $k=4,\ l=2$ $\qquad k=$ nº col., $l=$ nº filas.

b) $f(x)=AX,\ \forall X\in\mathbb{R}^k=\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2\\3&0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(x+3y+z+2t,\ 3x+2z)$$

c)
$f(1,0,0,0)=(1,3)=\alpha(1,0)+\beta(1,1) \to \begin{cases}1=\alpha+\beta\\3=\beta\end{cases}$ $\alpha=-2$

$f(0,1,0,0)=(3,0)=\alpha'(1,0)+\beta'(1,1) \to \begin{cases}3=\alpha'+\beta'\\\beta'=0\end{cases}$ $\alpha'=3$

$f(0,0,1,0)=(1,2)=\alpha''(1,0)+\beta''(1,1) \to \begin{cases}1=\alpha''+\beta''\\2=\beta''\end{cases}$ $\alpha''=-1$

$f(0,0,0,1)=(2,0)=\alpha'''(1,0)+\beta'''(1,1) \to \begin{cases}2=\alpha'''+\beta'''\\0=\beta'''\end{cases}$ $\alpha'''=2$

$$\begin{pmatrix}-2&3&-1&2\\3&0&2&0\end{pmatrix}=B$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc}1&1&1&3&1&2\\0&1&3&0&2&0\end{array}\right)$$

d) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} B_{C4} & \xrightarrow{A} & B_{C2} \\ I \uparrow & & \uparrow R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B_1 & \xrightarrow[B]{} & B_2 \end{array}$$

$$B = R^{-1} A I \implies \begin{array}{l} Q = R^{-1} \\ P = I_4 \end{array}$$

$$Q \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{P_{12}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e) $rg(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ supraryectiva

$\dim \mathbb{R}^4 \neq \dim \mathbb{R}^2$, no biyectiva

No isomorfismo

Núcleo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + z + 2t = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad x = -\frac{2}{3} z$$

$$-\frac{2z}{3} + 3y + z + 2t = 0 \qquad 3y + \frac{1}{3} z = -2t \Rightarrow t = -\frac{3}{2} y - \frac{1}{6}$$

$$\left(-\frac{2}{3} z, y, z, -\frac{3}{2} y - \frac{z}{6}\right) \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

3-) 1.5

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ 0 & -\lambda & -a \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) + a^2(1-\lambda) =$$
$$= (1-\lambda)\left[-2\lambda + \lambda^2 + a^2\right]$$

a) $\lambda^2 - 2\lambda + a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4a^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a^2}$, $a \in \mathbb{R}$

Si $a \neq \pm 1$ Diagonalizable en $\mathbb{C}$

Si $|a| < 1$ Diagonalizable en $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

Si $|a| > 1$ Diagonalizable en $\mathbb{C}$

b) $\boxed{a=1}$ $|A-\lambda I| = (1-\lambda)(\lambda-1)^2$

$\boxed{\lambda = 1}$ $E_1(1) = \mathrm{Ker}\,(A-I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = -z \qquad \langle (x,-z,z) \rangle = x(1,0,0) + z(0,-1,1)$$

$\dim E_1(1) = 2 \neq 3$

$E_2(1) = \mathrm{Ker}(A-I)^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim E_2(1) = 3$; $u_3 \in E_2(1) \setminus E_1(1)$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = (A-I)u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1 \in E_1(1)$ y lin. indep. con u_2, u_3. $\Longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} Au_1 = u_1 \\ Au_2 = u_2 \\ Au_3 = u_2 + u_3 \end{array}\right\} \quad A[u_1 u_2 u_3] = [u_1 u_2 u_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4- (V, f) , $\{a_1, \dots, a_m\}$ ortogonales , $a_i \neq 0$ $\forall i$

1.5

a) $\forall a \in \mathbb{R} \langle a_1, \dots, a_m \rangle$

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m$$

$$f(a, a_1) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m, a_1) = \alpha_1 f(a_1, a_1)$$

$$\dots$$

$$f(a, a_m) = f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, a_m) = \alpha_m f(a_m, a_m)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{f(a, a_1)}{f(a_1, a_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{f(a, a_2)}{f(a_2, a_2)}, \dots, \quad \alpha_m = \frac{f(a, a_m)}{f(a_m, a_m)}$$

b) $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots m$

$$f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, a_1) = \alpha_1 f(a_1, a_1) \underset{f(0, a_i) = 0}{=} 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\dots$$

$$f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, a_m) = \alpha_m f(a_m, a_m) = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$$

c) $\dim V = m \Rightarrow \{a_1, \dots, a_m\}$ es una base $\Rightarrow$ cualquier vector tiene coordenadas únicas en una base.

5- $Q(x, y) = -x^2 + \alpha x y - y^2$

1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha/2 \\ \alpha/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 - \frac{\alpha^2}{4} = 0 \Rightarrow 4 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

$|\alpha| < 2$ D. N.

$|\alpha| > 2$ INDEFINIDA

$|\alpha| = 2$ SDN.