ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Todos los grupos

5 de septiembre de 2004 Examen segunda convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1.- Se considera un cuadrado de vértices ABCD. Sea S_r el conjunto de todas las rotaciones en el plano que lo mantienen en la misma posición.

a) Indica cuales son los elementos de S_r

b) Establece la tabla de la operación $\circ$ (composición de transformaciones)

c) Razona si $(S_r, \circ)$ es un grupo conmutativo. ¿Existe algún elemento que genere a todos los demás?.

d) ¿Es cierto, en general, que si en un grupo G todos sus elementos son tales que $(a\,b)^2 = a^2\,b^2$, entonces, G es conmutativo?.

2.- Sean $A_i \in M_2(\mathbb{R})$ con $i = 1, 2, 3$ las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los valores del parámetro real a, para que $\{A_1, A_2, A_3\}$ sean linealmente independientes.

b) Para el caso particular $a = 2$, considerar los subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ definidos de la forma $F =< A_1, A_2 >$, $G =< A_3, I_2 >$, siendo I_2 la identidad. Encontrar una base de $F \bigcap G$ y $F + G$.

3.- En $\mathbb{R}^3$ se considera una base $\{u_i\}$ dada y la familia de vectores

$$v_1 = u_1 + 2u_2 + 3u_3, \quad v_2 = u_1 + u_3, \quad v_3 = 2u_2 + 3u_3$$

Se define la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{\mathbb{R}}(2)$ mediante

$$f(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3) = \begin{pmatrix} a+c & b-c \\ -b+c & a-c \end{pmatrix}$$

a) Prueba que $\{v_i\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

b) Expresa los vectores $\{u_i\}$ respecto de la base $\{v_i\}$

c) Encuentra la matriz A coordenada de f respecto de las bases canónicas de ambos espacios y la matriz B respecto de la base $\{v_i\}$ y la canónica de $M_{\mathbb{R}}(2)$. ¿Qué relación existe entre ambas?

d) Encuentra una base de Ker f y otra de Im f. ¿Pertenece la matriz Q siguiente

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a Im f?

4.- Se considera la forma bilineal

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$F(x, y) = x_1\,y_1 - 2\,x_1\,y_2 + 3\,x_2\,y_3 - x_3\,y_3 - x_3\,y_1$$

a) Encontrar la matriz coordenada A de F respecto de la base canónica

b) Probar que la aplicación

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$Q(x) = F(x, x)$$

es una forma cuadrática

c) Probar que F se puede expresar como suma de una forma bilineal simétrica, F_s, y otra antisimétrica, F_h (es decir, F_h(y, x) = - F_h(x, y)): $F(x, y) = F_s(x, y) + F_a(x, y)$

d) Probar que las formas cuadráticas definidas por F y por F_s coinciden.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$C\,X = D, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & a & b \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix}$$

Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB sobre la matriz M ampliada del sistema anterior:

```
>> M=[C, D];   l = eye(4);  u=M
[ 1, 2, 4, 6]
[ a, a, b, b]
[ 2, 4, 8, b]
[ 1, 2, a, b]
>> i=2;j=1;l(i,j)=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l(i,j)*u(j,:)
[     1,     2,     4,     6]
[     0,    -a, b-4*a, b-6*a]
[     2,     4,     8,     b]
[     1,     2,     a,     b]
>> i=3;j=1;l(i,j)=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l(i,j)*u(j,:)
[     1,     2,     4,     6]
[     0,    -a, b-4*a, b-6*a]
[     0,     0,     0,  b-12]
[     1,     2,     a,     b]
>> i=4;j=1;l(i,j)=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l(i,j)*u(j,:)
[     1,     2,     4,     6]
[     0,    -a, b-4*a, b-6*a]
[     0,     0,     0,  b-12]
[     0,     0,   a-4,   b-6]
>> aux=l(i,:);l(i,:)=l(3,:);l(3,:)=aux
>> aux=u(i,:);u(i,:)=u(3,:);u(3,:)=aux
[     1,     2,     4,     6]
[     0,    -a, b-4*a, b-6*a]
[     0,     0,   a-4,   b-6]
[     0,     0,     0,  b-12]
```

A partir de estos cálculos, justifica la certeza o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) el sistema es incompatible si b = 6, y es compatible determinado si $a \neq 0, 4$ y b = 12

b) para la matriz M no existe factorización L U

c) escribe la matriz L utilizada en el proceso

d) el producto L^{-1} U es parecido a M, ¿en que se diferencian?

e) la solución del sistema $A\,X = B$ en el caso de que $a = 2$ y $b = 12$ es (30, -6, -3)

Soluciones

1.- a) Los elementos de S son:

- e = neutro = giro nulo (no modifca la posición inicial.)
- a = Giro de 90^0 en sentido contrario a las agujas del reloj
- b = Giro de 180^0 en sentido contrario a las agujas del reloj
- c = Giro de 270^0 en sentido contrario a las agujas del reloj

1.- b) Tabla del grupo

$\circ$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

1.- c) La operación es ley de composición interna, ya que la tabla no contiene elementos de fuera de S_r. Es asociativa por serlo la composición de aplicaciones. El elemento neutro es e, que no m odifica ningún otro elemento. El simétrico de a es c, el simétrico de b es el propio b y el simétrico de c es a, como se ve en la tabla.

Además, el grupo es conmutativo, ya que la tabla es simétrica.

El elemento a genera todos los demás, ya que $a^2 = b$ y $a^3 = c$. También el elemento c genera todos los demás. Se trata de un grupo cíclico (monógeno) de orden 4.

1.- d) Si para cualesquiera $a, b \in G$ es $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$, se tiene:

$$(a \circ b)^2 = (a \circ b) \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ (b \circ b) \Longleftrightarrow \text{(prop. asoc.)} \quad a \circ (b \circ a) \circ b = a \circ (a \circ b) \circ b$$
$$\Longleftrightarrow \text{(exist. elem. inv.)} \quad (a^{-1} \circ a) \circ (b \circ a) \circ (b \circ b^{-1}) = (a^{-1} \circ a) \circ (a \circ b) \circ (b \circ b^{-1}) \Longleftrightarrow$$
$$\text{(def. elem. neutro.)} \quad b \circ a = a \circ b$$

2.- a) Escribiendo las coordenadas de estas matrices respecto de la base canónica y construyendo la matriz P que tiene por columnas dichas coordenadas, resulta:

```
p =
[  1,  1, -2]
[ -1,  1,  2]
[ -1,  1,  a]
[  1,  1, -a]
>> u=p;
>> i=2;j=1;l=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l*u(j,:)
[  1,  1, -2]
[  0,  2,  0]
[ -1,  1,  a]
[  1,  1, -a]
>> i=3;j=1;l=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l*u(j,:)
[   1,   1,  -2]
[   0,   2,   0]
[   0,   2, a-2]
[   1,   1,  -a]
 >> i=4;j=1;l=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l*u(j,:)
[    1,     1,    -2]
[    0,     2,     0]
[    0,     2,   a-2]
[    0,     0, -a+2]
>> i=3;j=2;l=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l*u(j,:)
[    1,     1,    -2]
[    0,     2,     0]
[    0,     0,   a-2]
[    0,     0, -a+2]
>> i=4;j=3;l=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-l*u(j,:)
[   1,   1,  -2]
[   0,   2,   0]
[   0,   0, a-2]
[   0,   0,   0]
```

En consecuencia, el rango de la familia es 3 si a $\neq 0$

2.- b)
```
>> f=[1 1;-1 1;-1 1;1 1]
        1              1
       -1              1
       -1              1
        1              1

>> g=[-2 1;2 0;2 0;-2 1]
       -2              1
        2              0
        2              0
       -2              1
>> fmg=[f,g]
        1              1              -2              1
       -1              1               2              0
       -1              1               2              0
        1              1              -2              1
>> rref(fmg)
        1              0              -2              1/2
        0              1               0              1/2
        0              0               0              0
        0              0               0              0
```
En consecuencia, G es un subespacio de F, por lo que F+G = F, F∩G=F

3.- a) Será base si, ya que está compuesta por 3 vectores (los mismo que la dimensión del espacio en el que se encuentran), son linealmente independientes, es decir, si el rango de dicha familia es 3. Para encontrar ese rango, se construye la matriz P que tiene por columnas las coordenadas de los vectores v_i respecto de la base $\{e_i\}$ y se realizan operaciones elementales sobre sus filas hasta conseguir la forma escalonada reducida

```
>> p=[1 2 3;1 0 1;0 2 3]'
     1     1     0
     2     0     2
     3     1     3
>> rref(p)
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Evidentemente, el rango de P es 3, y la familia $\{v_i\}$ es una base.

3.- b) El cambio de la base $\{e_i\}$ a la $\{v_i\}$ está expresado en forma matricial por

$$[v_1 v_2 v_3] = [e_1 e_2 e_3]\, P$$

Y el cambio inverso mediante:

$$[e_1 e_2 e_3] = [v_1 v_2 v_3]\, P^{-1}$$

que es lo que se nos pide. Así que basta calcular la matriz inversa de P, en forma siguiente:

```
>> pi=[p,eye(3)]
     1     1     0     1     0     0
     2     0     2     0     1     0
     3     1     3     0     0     1
>> i=2;j=1;lij=pi(i,j)/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)-lij*pi(j,:)
     1     1     0     1     0     0
     0    -2     2    -2     1     0
     3     1     3     0     0     1

>> i=3;j=1;lij=pi(i,j)/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)-lij*pi(j,:)
     1     1     0     1     0     0
     0    -2     2    -2     1     0
     0    -2     3    -3     0     1
>> i=3;j=2;lij=pi(i,j)/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)-lij*pi(j,:)
     1     1     0     1     0     0
     0    -2     2    -2     1     0
     0     0     1    -1    -1     1
>> i=2;j=3;lij=pi(i,j)/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)-lij*pi(j,:)
     1     1     0     1     0     0
     0    -2     0     0     3    -2
     0     0     1    -1    -1     1
```

```
>> i=1;j=2;lij=pi(i,j)/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)-lij*pi(j,:)
       1            0            0            1      3/2 -1
       0           -2            0            0      3   -2
       0            0            1           -1      -1  1
>> i=2;j=2;lij=1/pi(j,j);pi(i,:)=pi(i,:)*lij
       1            0            0            1      3/2 -1
       0           -2            0            0      -3/2   1
       0            0            1           -1      -1  1
>> pm1=pi(:,4:6)
       1            3/2          -1
       0           -3/2           1
      -1           -1            1
>> p*pm1
       1            0            0
       0            1            0
       0            0            1
```

3.- c) Basta aplicar la definición para obtener ambas matrices que tendrán por columnas, respectivamente, las coordenadas de las imágenes de los e's y los v's respecto de la base canónica de $M_{\mathbb{R}}(2)$

```
>> a=[1 0 1;0 1 -1;0 -1 1;1 0 -1]
       1            0            1
       0            1           -1
       0           -1            1
       1            0           -1
>> b=[4 2 3;-1 -1 -1;1 1 1;-2 0 -3]
       4            2            3
      -1           -1           -1
       1            1            1
      -2            0           -3

>> b==p*a
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

La relación existente entre A y B es la relación de equivalencia anterior.

3.- d) Considerando, por ejemplo, las bases canónicas de ambos espacios,

$$\text{Ker } f = \{x |\, A\, X = 0\};$$

pero como rg A = 3, resulta que Ker f = 0.

Im f = $\mathbb{R}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$, es decir, está engendrado por las tres columnas de la matriz A, que son linealmente independientes, luego constituyen una base de Im f.

Como rango de la matriz A ampliada con la columna (0, 1, 0, 1) es 4, como se ve a continuación

```
 >> ai=[a,[0 1 0 1]']
       1            0            1            0
       0            1           -1            1
       0           -1            1            0
       1            0           -1            1
>> rref(ai)
       1            0            0            0
       0            1            0            0
       0            0            1            0
       0            0            0            1
```

No existe ningún vector cuya imagen sea la matriz dada.

4.- a)

$$F(x, y) = X^T\, A\, Y, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.- b)
```
>>q(x) =  transpose(x)*a*x
x1^2-x1*x3-2*x1*x2+3*x3*x2-x3^2
```

es la expresión coordenada de una forma cuadrática q.

4.- c) La matriz coordenada de F se puede escribir de una sola forma como

$$A = A_s + A_h,$$

siendo

```
 >>as =  (b+transpose(b))/2
[    1,   -1, -1/2]
[   -1,    0,  3/2]
[ -1/2,  3/2,   -1]
>> ah = (b-transpose(b))/2
[    0,   -1,  1/2]
[    1,    0,  3/2]
[ -1/2, -3/2,    0]
```

La matriz A_s es simétrica y define la forma bilineal simétrica F_s y la matriz A_h es antisimétrica y define la forma bilineal antisimétrica F_h, de forma que se tiene:

$$F(x, y) = X^T\,A\,Y = X^T\,A_s\,Y + X^T\,A_h\,Y = F_s(x, y) + F_h(x, y)$$

4.- d) Basta comprobar que las matrices coordenadas correspondientes son iguales.

5.- a) La matriz U última es triangular superior y equivalente a la M, por lo que tienen el mismo rango. El bloque compuesto por las tres primeras columnas de U tiene rango 3 si a $\neq$ 0, 4, la matriz U completa tiene rango 4 si b $\neq$ 12. En consecuencia, si b = 6 $\neq$ 12, el sistema es incompatible; si a $\neq$ 0, 4 y b = 12, el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 3 (igual al número de incógnitas) y el sistema es compatible determinado.

5.- b) Para llegar a la U triangular superior ha hecho falta permutar las filas tres y cuatro, luego no existe la factorización L U de M. Sin embargo, sí existe para la matriz P_{34} M, resultado de haber permutado las filas tres y cuatro.

5.- c) La matriz L utilizada es

$$L = P_{43}\,P_{41}(-1)\,P_{31}(-2)\,P_{21}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -a & 1 & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que, evidentemente, no es triangular inferior

5.- d) A pesar de que L no es triangular, es la matriz que verifica L M = U, en consecuencia, L^{-1} U será exactamente igual a M. En efecto:

$$L^{-1} = P_{21}(a)\,P_{31}(2)\,P_{41}(1)\,P_{43} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a & 1 & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y solo falta multiplicar para comprobar el resultado.

5.- e) En efecto, en este caso el sistema es compatible determinado y esta n-tupla es la solución, pues la matriz U se reduce a la siguiente

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ & -2 & 4 & 0 \\ & & -2 & 6 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

que, de memoria, nos ofrece la solución dada.