ÁLGEBRA

Ingeniería Industrial, grupos A, C y E 1 de septiembre de 2004, tercera convocatoria

---

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de modo que

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

   (b) Halla bases de Ker$f$ y de Imf. Calcula, si es posible, una aniimagen de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Halla, si es posible, bases en $\mathbb{R}_3[x]$ y en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de modo que la matriz coordenada de f respecto de dichas bases sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si no es posible, razona por qué.

2. Se sabe que los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dados por $u_1 = (1, 3, 0)$, $u_2 = (5, 1, -1)$ y $u_3 = (2, 0, 0)$ forman una base conjugada de q, una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$. Además sabemos que $q(u_1) = 2$, $q(u_2) = 3$ y $q(u_3) = -2$.

   (a) Calcula la matriz de q con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Clasifica la forma cuadrática q.

   (c) Deduce, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ con respecto de la cual la matriz de q sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Si no es posible explica por qué.

3. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ de vectores propios de $f(x) = Ax$, y $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, con $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Demuestra que, si v es vector propio de f, entonces A tiene un único valor propio.

4. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes reales, sobre dicho conjunto se define la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} (\cdot,\cdot): & \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & p(0)q(0) + p(1)q(1) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1) \end{array}$$

   (a) Demostrar que la aplicación anterior es un producto escalar.

   (b) Calcular un polinomio $p \in \mathbb{R}_3[x]$, de norma uno y que sea ortogonal a todo elemento de $S = \{q \in \mathbb{R}_3[x] | q(0) = q(1) = 0\}$.

(c) Sea

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \langle p(x),q(x)\rangle & \mapsto & p(0)q(0)+p(1)q(1)+p'(0)q'(0)+p'(1)q'(1) \end{array}$$

¿Es producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$?

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5. Empleando MATLAB se han realizado las siguientes operaciones que se muestran con sus resultados

```
>> A=[0 8 -2; 8 10 -8; -2 -8 0]

     0     8    -2
     8    10    -8
    -2    -8     0

>> v1=[1;-1;-1]

     1
    -1
    -1

>> v2=[1; 0; 1];

>> v3=[-1; -2; 1];

>> V=[v1 v2 v3]

     1     1    -1
    -1     0    -2
    -1     1     1

>> inv(V)*A*V

   -6.0000    0.0000         0
         0   -2.0000         0
   -0.0000         0   18.0000
```

(a) Si consideramos `A` como la matriz de un cierto endomorfismo sobre $\mathbb{R}^3$, describe, de modo razonado, toda la información que las operaciones anteriores nos permiten deducir.

(b) Explica cómo deducirías empleando MATLAB si `v1`, `v2` y `v3` forman ó no, una base de $\mathbb{R}^3$. ¿Se puede asegurar que forman una base sin realizar ninguna operación?¿por qué?

(c) Describe brevemente qué hacen las funciones de MATLAB: `inv`, `rref`, `det`.