ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupos A, C y E

5 de julio de 2004 Examen segunda convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1.- Sea $H = \{a, b, c, d\}$ un conjunto sobre el que definimos dos operaciones internas de la siguiente forma:

+	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

•	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	b	d
c	c	b	a	d
d	d	d	d	d

a) Determina si $(H, +, \bullet)$ tiene estructura de cuerpo.
b) Obtener, si existen, los divisores de cero.
c) Si definimos $x^2 = x \bullet x$, $\forall x \in H$ y $n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in H$. Comprobar que no existen $x, y \in H$ tales que $x^2 = 4 \cdot y + c$.

2.- Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$.
a) Demostrar que $\{g(v_1), g(v_1) + g(v_2), g(v_1) + g(v_2) + g(v_3), \ldots, g(v_1) + \ldots + g(v_n)\}$ es un sistema libre.
b) Razonar si el sistema anterior es base de Img.

3.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo y A su matriz asociada respecto de una base conocida. Se sabe que una base del núcleo del endomorfismo cuya matriz es $A - I$ está constituida por los vectores $a_1 = (1, 1, 0)$ y $a_2 = (1, 0, 1)$ y que el vector $v = (0, 2, 1)$ tiene como imagen $f(v) = (1, 1, 0)$. Se pide:

a) Hallar los valores propios de f
b) Encontrar los subespacios generalizados de f
c) Hallar la forma canónica de Jordan J y la matriz de paso P
d) Calcular las matrices A y A^n

4 A.- (Elegir la 4 A.- ó la 4 B.-)
Dada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$

$$F(x, y) = 5\,x_1\,y_1 + 2\,x_1\,y_2 - x_1\,y_3 + 2\,x_2\,y_1 + x_2\,y_2 - x_2\,y_3 - x_3\,y_1 - x_3\,y_2 + s\,x_3\,y_3$$

a) ¿Para qué valores del parámetro s define F una forma cuadrática Q definida positiva?. ¿Y una forma definida negativa?
b) Determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el vector $w = u + \alpha\, v$ sea ortogonal a u (respecto de F), siendo $u = (1, 1, 1)$ y $v = (-1, 3, 1)$
c) Para $s = 4$ y $s = 2$, calcular la norma de los vectores u y v anteriores. Explicar por qué, para $s = 2$, la norma de v se anula.

4 B.- (Elegir la 4 A.- ó la 4 B.-)
Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$q(x, y, z) = 6xy + 8yz.$$

a) Clasificar la forma cuadrática atendiendo a su signo.

b) Justificar si es posible encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de la forma cuadrática sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En caso afirmativo calcula una base tal.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5.- Mediante MATLAB se han ejecutado los siguientes comandos:

```
>>B0=[1,1,1,1;0,1,2,1;1,0,-1,0;0,-1,1,-1];
>>B1=[B0(1,:);B0(2,:);B0(3,:)-B0(1,:);B0(4,:)];
>>B2=[B1(1,:);B1(2,:);B1(3,:)+B1(2,:);B1(4,:)];
>>B3=[B2(1,:);B2(2,:);B2(4,:);B2(3,:)];
>>B4=[B3(1,:);B3(2,:);B3(3,:)+B3(2,:);B3(4,:)]

B4 =
     1     1     1     1
     0     1     2     1
     0     0     3     0
     0     0     0     0
```

Sin realizar ninguna cuenta adicional, responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Determinar el rango de la matriz $B0$.

b) Sea C una matriz regular tal que $B0 = C \cdot B4$, expresar C como producto de matrices elementales.

c) Si $B0$ es la matriz coordenada de un endomorfismo h, ¿cuál es la dimensión de la imagen de h?, ¿y la de su núcleo?

d) Sea h el endomorfismo definido por la matriz $B0$. ¿Es h inyectivo, suprayectivo o biyectivo?