

Soluciones

```

1.- a) syms t
a=[t 1 1;1 1 t;2 2 2];
b=[1 t t*t]';
ab = [a,b]
ab =
[      t,      1,      1,      1]
[      1,      1,      t,      t]
[      2,      2,      2, t^2]
i=2;j=1;aux=ab(1,:);ab(1,:)=ab(2,:);ab(2,:)=aux
ab =
[      1,      1,      t,      t]
[      t,      1,      1,      1]
[      2,      2,      2, t^2]
i=2;j=1;ab(2,:)=ab(2,:)-ab(1,:)*t
ab =
[      1,      1,      t,      t]
[      0,      1-t, 1-t^2, 1-t^2]
[      2,      2,      2, t^2]
i=3;j=1;ab(i,:)=ab(i,:)-ab(j,:)*ab(i,j)
ab =
[      1,      1,      t,      t]
[      0,      1-t, 1-t^2, 1-t^2]
[      0,      0, 2-2*t, t^2-2*t]

```

En consecuencia,

si $t = 1$, $\text{rg } A = 1$ y $\dim \text{Ker } A = 2$
 si $t \neq 1$, $\text{rg } A = 3$ y $\dim \text{Ker } A = 0$

1.- b) El vector $b = (1, \alpha, \alpha^2)$ pertenece a la imagen si la matriz ampliada “ab” y la matriz A tienen el mismo rango, luego

si $t = 1$, $\text{rg } A = 1 = \text{rg } A|B$, luego el vector $b \in \text{Im } g$
 si $t \neq 1$, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A|B$, luego el vector $b \in \text{Im } g$

```

2.- a) a=[1/2 1 -1/2 0;1 1/2 0 -1/2;-1/2 0 1/2 1;0 -1/2 1 1/2];
rref(a)
ans =
     1         0         0        -1
     0         1         0         1
     0         0         1         1
     0         0         0         0

```

Luego, $\text{Ker } f = \mathbf{R}\{(1, -1, -1, 1)\}$. Pongamos $v_4 = (1, -1, -1, 1)$.

$\text{Im } f = \mathbf{R}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathbf{R}\{A^1, A^2, A^3\}$, que forman una base.

2.- b)

$$v \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f \implies x = t_4 v_4 = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3,$$

es decir, $T = (t_1, t_2, t_3, -t_4)$ es solución del sistema

$$BT = 0, \quad B = [A^1, A^2, A^3, v_4]$$

Ahora bien, $\text{rg } B = 4$, por eso resulta que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$

En consecuencia, la suma es directa y

$$\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbf{R}^4$$

2.- c) Como $\text{Ker } f = \{v \mid Ax = 0\}$ tiene dimensión 1, $\lambda = 0$ es valor propio simple de A y, en consecuencia, $T = \{u \mid A^2 u = 0\}$ coincidirá con $\text{Ker } f$.

2.- d) $\text{In}[1] := \mathbf{a}$

$$\text{Out}[1] = \begin{pmatrix} 1/2, 1, -1/2, 0 \\ 1, 1/2, 0, -1/2 \\ -1/2, 0, 1/2, 1 \\ 0, -1/2, 1, 1/2 \end{pmatrix}$$

$\text{In}[2] := \mathbf{axi} = \mathbf{a} - \mathbf{x} \text{IdentityMatrix}[4]; \mathbf{axi} // \text{MatrixForm}$

$$\text{Out}[2]= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-x & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

`In[3]:= aux = axi[[1]]; axi[[1]] = axi[[2]]; axi[[2]] = aux;`

`axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[3]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-x & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

`In[4]:= i = 2; j = 1; axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]];`

`axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[4]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

`In[5]:= i = 3; j = 1; axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]];`

`axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[5]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \\ 0 & \frac{1}{4}(1-2x) & \frac{1}{2}-x & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

`In[6]:= aux = axi[[2]]; axi[[2]] = axi[[4]]; axi[[4]] = aux;`

`axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[6]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & \frac{1}{4}(1-2x) & \frac{1}{2}-x & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \end{pmatrix}$$

`In[7]:= i = 3; j = 2;`

`axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]] / axi[[j, j]];`

`axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[7]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 0 & 1-2x & 1-x+x^2 \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \end{pmatrix}$$

`In[8]:= i = 4; j = 2;`

`axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]] / axi[[j, j]];`

`axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[8]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 0 & 1-2x & 1-x+x^2 \\ 0 & 0 & 1+2x-2x^2 & 1-x-3x^2+2x^3 \end{pmatrix}$$

`In[9]:= i = 4; j = 3;`

`axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]] / axi[[j, j]];`

`axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm`

$$\text{Out}[9] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} - x \\ 0 & 0 & 1 - 2x & 1 - x + x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2x(2 - x - 2x^2 + x^3)}{-1 + 2x} \end{pmatrix}$$

$$\text{In}[10] := \text{Factor}[\text{axi}[[4, 4]]]$$

$$\text{Out}[10] = \frac{2(-2+x)(-1+x)x(1+x)}{-1+2x}$$

En consecuencia,

$$\text{Det}(A - xI) = 0 = (-2 + x)(-1 + x)x(1 + x) \implies \lambda = 1, -1, 2, 0$$

Luego la base de Jordan está formada por un vector propio de cada uno de los subespacios fundamentales:

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 = 0 &\implies v_1 = (1, 1, 1, 1) \\ (A + I)v_2 = 0 &\implies v_2 = (-1, 1, -1, 1) \\ (A - 2I)v_3 = 0 &\implies v_3 = (-1, -1, 1, 1) \\ (A - 0I)v_4 = 0 &\implies v_4 = (1, -1, -1, 1) \end{aligned}$$

3.- a)

```
d = [a, eye(4)]
      1/2      1      -1/2      0      1      0      0      0
      1      1/2      0      -1/2      0      1      0      0
     -1/2      0      1/2      1      0      0      1      0
      0     -1/2      1      1/2      0      0      0      1
i=2; j=1; d(i,:) = d(i,:) - d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
i=3; j=1; d(i,:) = d(i,:) - d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(1,2)=0; d(1,3)=0
d =
      1/2      0      0      0      1      0      0      0
      0     -3/2      1     -1/2     -2      1      0      0
      0      1      0      1      1      0      1      0
      0     -1/2      1      1/2      0      0      0      1
d(1,2)=0; d(1,3)=0
i=3; j=2; d(i,:) = d(i,:) - d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
i=4; j=2; d(i,:) = d(i,:) - d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(2,3)=0; d(2,4)=0
d =
      1/2      0      0      0      1      0      0      0
      0     -3/2      0      0     -2      1      0      0
      0      0      2/3      2/3     -1/3      2/3      1      0
      0      0      2/3      2/3      2/3     -1/3      0      1
i=4; j=3; d(i,:) = d(i,:) - d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(3,4)=0
d =
      1/2      0      0      0      1      0      0      0
      0     -3/2      0      0     -2      1      0      0
      0      0      2/3      0     -1/3      2/3      1      0
      0      0      0      0      1     -1     -1      1
```

En consecuencia, $\text{rg } q = 3$ y $\text{sg } q = 2$, luego la forma cuadrática es indefinida.

3.- b) Una base asociada a la diagonal es la formada por las filas de la matriz constituida por las últimas 4 columnas de la matriz d última, es decir, las filas de la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- c) Como la matriz A no es definida positiva, no se puede obtener la factorización de Cholesky, pues esta requiera el cálculo de las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal d, y hay algunos de ellos negativos.

4.- a) Veamos si los datos que se nos ofrecen permiten realizar la partición de multiplicidades del único valor propio. Recordemos que $E_k(\lambda) = N(\lambda, k)$.

Puesto que $n_1 = p_1 = \dim E_1(\lambda) = 2$, solo se podrán construir dos cadenas de vectores para la base de Jordan y, por lo tanto, habrá dos cajas de Jordan.

$$\text{Si } \dim E_1(\lambda) = 2 \implies \alpha_1 = \text{rg } A - \lambda I = 3$$

$$\text{Si } \dim E_3(\lambda) = 5 \implies \alpha_3 = \text{rg } A - \lambda I^3 = 0$$

Por lo tanto, $\alpha_2 = \text{rg}(A - \lambda I)^2 = 2, 1$ ó 0 , puesto que $N(\lambda, 1) \subset N(\lambda, 2) \subset \dots$

Si $\alpha = 2, \implies p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 2 \implies q_3 = 2, q_2 = -1$, que no es posible, pues no puede haber bloques de dimensión negativa.

Si $\alpha = 1, \implies p_1 = 2, p_2 = 2, p_3 = 1 \implies q_3 = 1, q_2 = 1, q_1 = 0$ que es posible, pues habrá un bloque de orden 3 y otro de orden 2.

Si $\alpha = 0, \implies p_1 = 2, p_2 = 3 \implies q_2 = 3$, que no es posible, pues la suma de las dimensiones de los bloques sería 6, mayor que la dimensión del espacio \mathbf{R}^5 .

Luego, es posible.

4.- b) La relación de semejanza habitual es

$$H Q = Q J, \text{ es decir, } H = Q J Q^{-1},$$

luego la que se pide es $P = Q^{-1}$. Para encontrarla, por ejemplo, hay realizar operaciones elementales sobre la matriz ampliada de la Q con la matriz unidad hasta conseguir al unidad en el bloque que ocupa Q . Así se obtiene

$$P = \text{inv}(q) \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

5.- a) La reducción por filas de la orden 2) indica que $v_3 = -2v_1 + v_2$

5.- b) Las columnas de la matriz “smw” construida en la orden 5) tiene por columnas la unión de una base de S y otra de W , luego es un sistema generador de $S + W$. En la orden 6) se obtiene que son independientes, luego es una base de $S + W$, constituida por 4 vectores, en consecuencia, $S + W$ coincide con \mathbf{R}^4 . Luego

$$\dim(S \cap W) = \dim S + \dim W - \dim(S + W) = 0,$$

es decir, $S \cap W = 0$

5.- c) Según el apartado anterior, $S + W = \mathbf{R}^4$ y $S \cap W = 0$, luego la suma es directa y son suplementarios.

5.- d) El proceso seguido en las órdenes 7) a 19) nos indica que la matriz “smw” es inversible con inversa $P = \text{“smw”}^{-1}$ igual al bloque compuesto por las últimas 4 columnas.

5.- e) Estos vectores son las columnas de la inversa de la matriz “smw”, luego el rango es 4 y los vectores son linealmente independientes, es decir, una base de \mathbf{R}^4 .

5.- f) Basta observar que $P = \text{“smw”}^{-1}$ es la matriz producto de todas las operaciones elementales realizadas sobre las filas de “smw” para obtener la matriz unidad, así que basta escribir

$$P \text{ “smw”} I = I,$$

que es la relación de equivalencia entre “smw” y I .