ALGEBRA (Ingeniería Industrial)

2 de febrero de 2004 Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. (a) Discutir, en función de los valores del parámetro α, la dimensión del núcleo de la aplicación lineal g, cuya matriz coordenada respecto de una base conocida es

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Hallar los valores de α para los cuales el vector de coordenadas $(1, \alpha^2, 2\alpha)$ con respecto de la base anterior pertenece a la imagen de g.

2. Sea f una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, y

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

   su matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Obtener una base de $\ker f$ y de $\mathrm{Im} f$.

   (b) Calcular $\ker f \cap \mathrm{Im} f$ y $\ker f + \mathrm{Im} f$.

   (c) Sin calcular A^2, dar una base de $T = \{u \in \mathbb{R}^4 | A^2 u = 0\}$

   (d) Obtener la base respecto de la cual la matriz coordenada de f es su forma canónica de Jordan.

3. Sea la forma cuadrática $\begin{array}{rl} q : & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^\top A x \end{array}$, donde A es la matriz del ejercicio anterior,

   (a) Clasificar dicha forma cuadrática.

   (b) Obtener una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cual la matriz asociada a q sea diagonal.

   (c) Razonar si existe $L \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangular tal que $A = L \cdot L^\top$.

4. Sea $h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo con un único valor propio λ.

   (a) Razonar si es posible la siguiente situación:

$$\mathrm{dim} E_1(\lambda) = 2, \qquad \mathrm{dim} E_3(\lambda) = 5,$$

   siendo $E_i(\lambda)$ los núcleos iterados o subespacios fundamentales generalizados asociados al valor propio λ. Y calcular, si es posible, la forma de Jordan que resultaría en tal caso.

   (b) Sea $\{(1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,1,1), (0,0,0,0,1)\}$ la base de Jordan correspondiente, y H la matriz coordenada de h respecto de la base canónica, obtener la matriz P tal que $H = P^{-1}\, J\, P$.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5. Sean los subespacios S y W de $\mathbb{R}^4$, $S = \mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $W = \mathbb{R}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, siendo los vectores $v_1 = (0, 1, -1, -1), v_2 = (1, 2, -1, -1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (-2, -3, 1, 1)$ y $w_1 = (1, 1, -1, -1), w_2 = (-1, -1, 0, 1), w_3 = (2, 2, -1, -2), w_4 = (3, 3, -2, -3)$. Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
1) s = [v1, v2, v3, v4]
      0     1     1    -2
      1     2     0    -3
     -1    -1     1     1
     -1    -1     1     1

2) rref(s)
      1     0    -2     1
      0     1     1    -2
      0     0     0     0
      0     0     0     0

3) w=[w1, w2, w3, w4]
      1    -1     2     3
      1    -1     2     3
     -1     0    -1    -2
     -1     1    -2    -3

rref(w)
      1     0     1     2
      0     1    -1    -1
      0     0     0     0
      0     0     0     0

4) smw=[v1, v2, w1, w2]
      0     1     1    -1
      1     2     1    -1
     -1    -1    -1     0
     -1    -1    -1     1

5) rref(smw)
      1     0     0     0
      0     1     0     0
      0     0     1     0
      0     0     0     1

6) u=[smw,eye(4)]
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      1     2     1    -1     0     1     0     0
     -1    -1    -1     0     0     0     1     0
     -1    -1    -1     1     0     0     0     1

7) aux=u(1,:);u(1,:)=u(2,:);u(2,:)=aux
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
     -1    -1    -1     0     0     0     1     0
     -1    -1    -1     1     0     0     0     1

8) i=3;j=1;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      0     1     0    -1     0     1     1     0
     -1    -1    -1     1     0     0     0     1

9) i=4;j=1;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      0     1     0    -1     0     1     1     0
      0     1     0     0     0     1     0     1
```

```
10) i=3;j=2;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     1     0     0     0     1     0     1

11) i=4;j=2;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0    -1     1    -1     1     0     1

12) i=4;j=3;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1    -1     1     0     0     0
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

13) i=2;j=4;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1    -1     0     1     0     0
      0     1     1     0     1     0    -1     1
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

14) i=1;j=4;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1     0     0     1    -1     1
      0     1     1     0     1     0    -1     1
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

15) i=2;j=3;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     1     0     0     1    -1     1
      0     1     0     0     0     1     0     1
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

16) i=1;j=3;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     2     0     0    -1     2     0     1
      0     1     0     0     0     1     0     1
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

17) i=1;j=2;u(i,:)=u(i,:)-u(j,:)*u(i,j)/u(j,j)
      1     0     0     0    -1     0     0    -1
      0     1     0     0     0     1     0     1
      0     0    -1     0    -1     1     1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1

18) u(3,:)=u(3,:)/u(3,3)
      1     0     0     0    -1     0     0    -1
      0     1     0     0     0     1     0     1
      0     0     1     0     1    -1    -1     0
      0     0     0     1     0     0    -1     1
```

Razonar, a partir de estos cálculos y sin hacer otros, que:
a) el vector v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2;
b) $\dim S \cap W = 0$;
c) S y W son subespacios suplementarios respecto de $\mathbb{R}^4$;
d) la matriz “smw” es inversible.
e) la familia $\{(-1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,-1,-1),\,(-1,1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$
f) la matriz “smw” es equivalente a la matriz unidad I_4.