ALGEBRA (Ingeniería Química)

9 de Febrero de 2009 Primera convocatoria

Prueba de problemas (75%)

1. (1.25 ptos) Determinar cuáles de los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo con las operaciones indicadas:

   (a) El conjunto de los números naturales, con la suma.

   (b) El conjunto de los numeros enteros pares, con la suma.

   (c) El conjunto de los numeros enteros impares, con el producto.

   (d) El conjunto [0, 1] con el producto.

   (e) El conjunto (0,1) con el producto.

2. (2.25 ptos) Sea $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de ambos espacios es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Justificar cuales son los valores de k y l.

   (b) Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal.

   (c) Calcular la matriz B de la aplicación lineal en las bases:

$$B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \;\; y \; B_2 = \{(1,0),\ (1,1)\}$$

   (d) Encontrar dos matrices P y Q tales que $B = QAP$

   (e) ¿Es f suprayectiva?. ¿Es un isomorfismo?.

3. (1.5 ptos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Discutir qué valores de $a \in \mathbb{R}$ hacen A diagonalizable en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{C}$?.

   (b) Para $a = 1$ determinar una matriz de Jordan J y una matriz P tales que $A = P\,J\,P^{-1}$.

4. (1.5 ptos) Sean $(V,\, f)$ un espacio euclídeo y $\{a_1,\, a_2, \ldots, a_m\}$ un sistema de vectores ortogonales, no nulos de V. Probar:

   (a) $\forall a \in \mathbb{R} < a_1,\, a_2, \ldots, a_m >, \;\; a = \dfrac{f(a,\, a_1)}{f(a_1,\, a_1)}\, a_1 + \cdots + \dfrac{f(a,\, a_m)}{f(a_m,\, a_m)}\, a_m.$

   (b) $\{a_1,\, a_2, \ldots, a_m\}$ es un sistema libre de V.

   (c) Si $m = dimV$, cada vector de V se escribe de modo único en la forma dada en el apartado a).

5. (1 pto) Clasificar la forma cuadrática:

$$Q(x,y) = -x^2 + \alpha xy - y^2$$

   según los valores del parámetro α.