ALGEBRA (Ingeniería Industrial) — Grupos B y C

7 de febrero de 2007 — Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. En el conjunto $A = \{x \,/\, x \text{ son dígitos impares}\}$ se han definido las siguientes operaciones:

   $*$: es una operación tal que, $a * b = c$, siendo c la cifra de las unidades del producto $a.b$. (Ejemplo: $4 * 9 = 6$, puesto que $4.9 = 36$)

   $.$: multiplicación estandar por los elementos de $\mathbb{R}$.

   Construye la tabla de $(A, *)$ y estudia si $(A, *, \cdot_{\mathbb{R}})$ es, o no es, espacio vectorial.

2. Sea el espacio vectorial real $M_2(\mathrm{R})$ y los conjuntos

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, 2a + b + c - d = 0, \, a - b - c = 0\}$$

$$T = \mathrm{R} < \{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\} >$$

   (a) Demuestra que S es subespacio vectorial.
   (b) Da una base de S y otra de T.
   (c) Halla $S + T$.
   (d) Estudia si $S + T$ es suma directa.

3. Sea $f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tal que

$$f(a_1 + 2a_2) = b_1 + b_3, \;\; f(a_2) = 2b_1 + b_2.$$

   donde $\{a_i\} = \{a_1, a_2\}$ y $\{b_i\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ son bases de V y W respectivamente. Se pide:

   (a) Matriz coordenada A de la aplicación lineal respecto a las bases $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$.
   (b) Matriz coordenada B de la aplicación lineal respecto de las bases $\{\alpha_i\} = \{a_1 + a_2, a_1 - a_2\}$ de V y $\{\beta_i\} = \{b_1 + b_3, b_1 - b_2, b_2\}$ de W.
   (c) Imagen respecto de $\{\beta_i\}$ de un vector cuyas coordenadas respecto de $\{\alpha_i\}$ son $(2, 3)$.
   (d) Núcleo e imagen de la aplicación f. ¿Es biyectiva?.

4. Sea $h : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, y A la matriz asociada respecto a la base $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Se sabe que:

   - $\{ a_1, a_2\}$ es una base del núcleo del endomorfismo cuya matriz es $(A - I)$.
   - $h(a_3) = -2a_1 + 3a_3$
   - $a_4 \in Ker\, h$

   (a) Demuestra que $v = a_1 - a_3$ es vector propio e indica el valor propio asociado.

   (b) Razona que h es diagonalizable.

   (c) Da una base de vectores propios y la matriz coordenada respecto de esa base.

   (d) Estudia si es cierto que toda matriz coordenada de h no es regular.

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo con un único valor propio λ. Calcular, si es posible, la forma de Jordan que resultaría en el caso de que:

$$dim E_1(\lambda) = 2,\ dim E_2(\lambda) = 4,$$

   siendo $E_i(\lambda)$ los núcleos iterados o subespacios fundamentales generalizados asociados al valor propio λ.

6. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Considerese en $P_2[x]$ el producto escalar

$$p(x) \bullet q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

   Determinar la norma de $p_1(x) = mx + 1$ sabiendo que es ortogonal a $p_2(x) = x^2$.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

8. Teniendo en cuenta los cálculos realizados con MATLAB sobre la matriz A y que se presentan a continuación, contesta *razonadamente* a las preguntas indicadas.

```
>> A=[1 -2 0;-2 6 1;0 1 2]

A =

     1    -2     0
    -2     6     1
     0     1     2
>> P=eye(3)

P =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> A=[A(1,:);A(2,:)+2*A(1,:);A(3,:)]

A =

     1    -2     0
     0     2     1
     0     1     2

>> P=[P(1,:);P(2,:)+2*P(1,:);P(3,:)]

P =

     1     0     0
     2     1     0
     0     0     1

>> A=[A(:,1) A(:,2)+2*A(:,1) A(:,3)]

A =

     1     0     0
     0     2     1
     0     1     2

>> A=[A(1,:);A(2,:);A(3,:)-1/2*A(2,:)]

A =

    1.0000         0         0
         0    2.0000    1.0000
         0         0    1.5000
```

```
>> P=[P(1,:);P(2,:);P(3,:)-1/2*P(2,:)]

P =

    1.0000         0         0
    2.0000    1.0000         0
   -1.0000   -0.5000    1.0000

>> A=[A(:,1) A(:,2) A(:,3)-1/2*A(:,2)]

A =

    1.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    1.5000
```

(a) Construye la forma cuadrática Q definida sobre R^3 que tiene la matriz A del enunciado como matriz coordenada respecto de la base canónica de R^3.

(b) Clasifica la forma cuadrática Q.

(c) Estudia si A es congruente a una matriz diagonal.

(d) Estudia si existe una base conjugada respecto de F forma bilineal simétrica definida sobre R^3 que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de R^3 y, en caso afirmativo, constrúyela.