ALGEBRA (Ingeniería Industrial) **Grupos A,C y D**

6 de Febrero de 2008 **Primera convocatoria**

Prueba de problemas (87'5%)

1. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con la ley de composición interna $*$ definida de modo incompleto por la tabla adjunta:

$*$	a	b	c	d
a		a	b	
b	a	b	c	b
c	b	c	b	
d		d		

   (a) Estudiar si hay alguna manera de rellenar la tabla de manera que $(A, *)$ sea un grupo.

   (b) Justificar si $*$ es una operación conmutativa cualquiera que sea la manera de completar la tabla.

2. Sea el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices dos por dos sobre el cuerpo de los reales y
$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) / \, x = z, \; y = t \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) / \, \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$
dos subconjuntos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Calcular una base de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ y sus dimensiones.

   (c) Justificar si W_1 y W_2 son suma directa.

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ con $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que dos y coeficientes reales, tal que
$$f(a, b, c, d) = (a + b)x^2 - cx + d.$$

   (a) Calcular la matriz A de la aplicación lineal en las bases canónicas de ambos espacios.

(b) Obtener el núcleo de la aplicación lineal y estudiar si es una aplicación suprayectiva. ¿Es biyectiva?.

(c) Calcular la matriz B de la aplicación lineal en las bases:

$$B_1 = \{(1,0,0,0),(1,2,0,0),(3,0,1,0),(0,0,0,1)\} \;\; y \; B_2 = \{1, x, x^2\}$$

(d) Encontrar dos matrices P y Q tales que $B = QAP$

4. Se sabe que los valores propios de una matriz A son $\{1, -1, 6\}$. Además se tiene

$$\begin{array}{l} dim\, E_1(1) = dim\, E_2(1) = 1 \\ dim\, E_1(-1) = 1 \\ dim\, E_2(-1) = 2 \\ dim\, E_3(-1) = dim\, E_4(-1) = 3 \\ dim\, E_1(6) = dim\, E_2(6) = 1 \end{array}$$

¿ Cuál es la dimensión de la matriz A?. Escribe la forma canónica de Jordan.

5. Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno, y el producto escalar:

$$f\ (p_1(x),\ p_2(x)) = p_1(x) * p_2(x) = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx.$$

(a) Calcular la matriz del producto escalar en la base $B = \{1,\ x\}$.

(b) Encontrar el ángulo que forman los polinomios $x+3$ y $2x+4$ respecto de dicho producto.

(c) Obtener una base ortonormal a partir de la base $B = \{1,\ x\}$.

Prueba práctica (12'5%)

6. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se han ejecutado las siguientes órdenes en MATLAB:

```
>> A=[1 2 0;2 3 1;0 1 1]
A =
     1     2     0
     2     3     1
     0     1     1
>> P=eye(3)
P =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

```
>> AP=[A,P]

AP =
     1     2     0     1     0     0
     2     3     1     0     1     0
     0     1     1     0     0     1

>> AP(2,:)=AP(2,:)-2*AP(1,:)

AP =
     1     2     0     1     0     0
     0    -1     1    -2     1     0
     0     1     1     0     0     1

>> AP(:,2)=AP(:,2)-2*AP(:,1)

AP =
     1     0     0     1     0     0
     0    -1     1    -2     1     0
     0     1     1     0     0     1

>> AP(3,:)=AP(3,:)+AP(2,:)

AP =
     1     0     0     1     0     0
     0    -1     1    -2     1     0
     0     0     2    -2     1     1

>> AP(:,3)=AP(:,3)+AP(:,2)

AP =
     1     0     0     1     0     0
     0    -1     0    -2     1     0
     0     0     2    -2     1     1
```

(a) Clasificar la forma cuadrática que tiene por matriz asociada A.

(b) Escribir la matriz P que satisface $D = P\,A\,P'$.

(c) Dar una base conjugada.

(d) ¿Puede la matriz A definir un producto escalar en $\mathbb{R}^3$?.

SOLUCION

```
>> D=AP(:,1:3)

D =

     1     0     0
     0    -1     0
     0     0     2

>> P=AP(:,4:6)

P =

     1     0     0
    -2     1     0
    -2     1     1

>> D==P*A*P'

ans =

     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```