ÁLGEBRA (Ingeniería Industrial)

4 de febrero de 2005 Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. Se considera un rectángulo de vértices ABCD y sea S el conjunto formado por todas las transformaciones que lo mantienen en la misma posición.

   (a) Indica cuales son los elementos de S.

   - Neutro $\longrightarrow$ 1. (Posición inicial.)

   - Simetría de eje OY $\longrightarrow a$.

   - Simetría de eje OX $\longrightarrow b$.

   - Giro de 180 en sentido contrario a las agujas del reloj $\longrightarrow c$.

   (b) Establece la tabla de $(S, \circ)$ siendo $\circ$ la operación composición.
   Tabla del grupo

$\circ$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

   (c) Razona si $(S, \circ)$ es grupo conmutativo. ¿Existe algún elemento que genere todos los demás?
   Fácilmente se comprueba que la operación es ley de composición interna y asociativa. El elemento neutro es la posición inicial indicada por 1 como ya se ha señalado. El simétrico de cada elemento es el propio elemento.
   El grupo es conmutativo como puede comprobarse en la tabla.
   No hay nigún elemento que genere todos los demás. No existe nigún elemento de S tal que cualquier otro sea una potencia de él.

   (d) ¿Es cierto, en general, que si en un grupo G todos sus elementos son tales que $a \circ a = 1$, entonces G es conmutativo?
   Cierto. Si para cualquier $a \in G$ es $a^2 = 1$ se tiene:

$$a \circ b = b \circ a \Longleftrightarrow (a \circ b) \circ (a \circ b) = (b \circ a) \circ (a \circ b) \Longleftrightarrow (a \circ b)^2 = b \circ (a \circ a) \circ b$$

   lo que es cierto.

2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación dada por

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Halla la matriz cordenada de f en las bases canónicas.

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Calcula la matriz cordenada de f en las bases

$$B_1 = \left\{1,\ x\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \frac{x^2}{2}\right\} \text{ de } \mathbb{R}_2[x]$$

y

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } M_2(\mathbb{R}).$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2 - \frac{x}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\frac{x^2}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Obten bases de $ker(f)$ e $Im(f)$. ¿Es f inyectiva, suprayectiva o biyectiva?.

$$Kerf = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]/f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim $Kerf$+dim Imf = dim$\mathbb{R}_2[x] \Longrightarrow$ dim $Imf = 3$

Base de $Imf = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

f es inyectiva ya que $Kerf = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$. No es suprayectiva porque la dimensión del subespacio imagen no coincide con la dimensión de $M_2(\mathbb{R})$ que es 4. Por lo tanto, no es biyectiva.

(d) Razona si tiene sentido plantearse el estudio de valores propios y vectores propios en este problema.

3. Se considera la forma cuadrática q sobre $\mathbb{R}$ dada por:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 + 2\,a\,x_2\,x_3 + x_3^2 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Construye la matriz coordenada A de q con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Halla una matriz P, regular, tal que PAP^T sea una matriz diagonal. Determina, en función del parámetro a, el rango y la signatura de q.

Una forma:Hacer operaciones de filas y columnas con matrices elementales:

$$P_{32}(-a)P_{21}(-1)\,A\,P_{12}(-1)P_{23}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = D$$

$$I_3P_{21}(-1)P_{32}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$I_3P_{12}(-1)P_{23}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T$$

$$PAP^T = D \iff \quad A \text{ y } D \text{ son congruentes}$$

$$rg(A) = rg(D) = \begin{cases} 3 & a \neq \pm 1 \\ 2 & a = \pm 1 \end{cases}, \qquad sig(A) = sig(D) = \begin{cases} (3,0) & a \in (-1,1) \\ (2,1) & a \notin (-1,1) \end{cases}$$

(c) Se considera la forma polar f de q. En el caso $a = 0$, estudia si f define un producto escalar.

Para $a = 0$ se tiene que $rg(A) = 3$ y $sig(A) = (3,0)$. Por tanto, A es definida positiva y f es una forma bilineal simétrica definida positiva, es decir define un producto escalar.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

4. Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
>> A
A =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> eig(A)
ans =

         0
         4
         4
         4
         4
         0
         0

>> c1x=A
c1x =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> null(c1x)
ans =
  0 -2
  0  1
  0  2
  0  0
  0  0
  1  0
  0  1

>> c2x=A^2
c2x =

     0   -32   -16     0   -16     0    64
     8    32     8     0     8     0   -32
     0     0    16     0     0     0   -32
     0     0    -8    16     0     0    16
     0     0     0     0     0     0     0
    16    64     0    32    16     0   -32
     0     0     0     0     0     0     0

>> null(c2x)
ans =

    0  0 -2
    0  0  1
    0  2  0
    0  0  0
    0  2 -2
    1  0  0
    0  1  0
```

```
>> d1x=A-4*eye(7)
d1x =

    -2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     2     1     0     4     0    -6
     0     0     0     0     4     0    -8
     0     0    -1     0     0     0     2
     0     0     0     0    -4     0     0
     2    12     0     8     8    -4    -8
     0     0     0     0     2     0    -4

>> null(d1x)
ans =

  -2  0
   1  0
   0  0
   0  1
   0  0
   2  2
   0  0


>> d2x=(A-4*eye(7))^2
d2x =

     0     0     0     0    48     0   -32
     0     0     0     0   -24     0    16
     0     0     0     0   -32     0    32
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0    16     0     0
     0   -32     0   -32   -48    16    32
     0     0     0     0   -16     0    16

>> null(d2x)
ans =

  1 0 0 0
  0 0 1 0
  0 1 0 0
  0 0 0 1
  0 0 0 0
  0 0 2 2
  0 0 0 0
```

A partir de estos cálculos responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es la matriz A diagonalizable ?.
No, la dimensión de los subespacios fundamentales NO coinide con la multiplicidad de los valores propios.

(b) En caso afirmativo escribe su forma diagonal.En caso de que no lo sea obten su forma canónica de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Explica cómo calcularías la matriz de paso P.