ÁLGEBRA (Ingeniería Industrial)

4 de febrero de 2005 Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. Se considera un rectángulo de vértices ABCD y sea S el conjunto formado por todas las transformaciones que lo mantienen en la misma posición.

   (a) Indica cuales son los elementos de S.

   (b) Establece la tabla de $(S, \circ)$ siendo $\circ$ la operación composición.

   (c) Razona si $(S, \circ)$ es grupo conmutativo. ¿Existe algún elemento que genere todos los demás?

   (d) ¿Es cierto, en general, que si en un grupo G todos sus elementos son tales que $a \circ a = 1$, entonces G es conmutativo?

2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación dada por

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$

   (a) Halla la matriz cordenada de f en las bases canónicas.

   (b) Calcula la matriz cordenada de f en las bases

$$B_1 = \left\{ 1,\ x\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \frac{x^2}{2} \right\} \quad \text{de } \mathbb{R}_2[x]$$

   y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{de } M_2(\mathbb{R}).$$

   (c) Obten bases de $ker(f)$ e $Im(f)$. ¿Es f inyectiva, suprayectiva o biyectiva?.

   (d) Razona si tiene sentido plantearse el estudio de valores propios y vectores propios en este problema.

3. Se considera la forma cuadrática q sobre $\mathbb{R}$ dada por:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 + 2\,a\,x_2\,x_3 + x_3^2 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Construye la matriz coordenada A de q con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Halla una matriz P, regular, tal que PAP^T sea una matriz diagonal. Determina, en función del parámetro a, el rango y la signatura de q.

   (c) Se considera la forma polar f de q. En el caso $a = 0$, estudia si f define un producto escalar.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

4. Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
>> A
A =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> eig(A)
ans =

         0
         4
         4
         4
         4
         0
         0

>> c1x=A
c1x =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> null(c1x)
ans =
  0 -2
  0  1
  0  2
  0  0
  0  0
  1  0
  0  1

>> c2x=A^2
c2x =

     0   -32   -16     0   -16     0    64
     8    32     8     0     8     0   -32
     0     0    16     0     0     0   -32
     0     0    -8    16     0     0    16
     0     0     0     0     0     0     0
    16    64     0    32    16     0   -32
     0     0     0     0     0     0     0

>> null(c2x)
ans =

    0  0 -2
    0  0  1
    0  2  0
    0  0  0
    0  2 -2
    1  0  0
    0  1  0
```

```
>> d1x=A-4*eye(7)
d1x =

    -2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     2     1     0     4     0    -6
     0     0     0     0     4     0    -8
     0     0    -1     0     0     0     2
     0     0     0     0    -4     0     0
     2    12     0     8     8    -4    -8
     0     0     0     0     2     0    -4

>> null(d1x)
ans =

  -2  0
   1  0
   0  0
   0  1
   0  0
   2  2
   0  0


>> d2x=(A-4*eye(7))^2
d2x =

     0     0     0     0    48     0   -32
     0     0     0     0   -24     0    16
     0     0     0     0   -32     0    32
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0    16     0     0
     0   -32     0   -32   -48    16    32
     0     0     0     0   -16     0    16

>> null(d2x)
ans =

  1 0 0 0
  0 0 1 0
  0 1 0 0
  0 0 0 1
  0 0 0 0
  0 0 2 2
  0 0 0 0
```

A partir de estos cálculos responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es la matriz A diagonalizable ?.

(b) En caso afirmativo escribe su forma diagonal.En caso de que no lo sea obten su forma canónica de Jordan.

(c) Explica cómo calcularías la matriz de paso P.