Sep-07

1-) $C = \{1, i, -1, -i\}$

	1	i	-1	$-i$
1	$\boxed{1}$	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	$\boxed{1}$
-1	-1	$-i$	$\boxed{1}$	i
$-i$	$-i$	$\boxed{1}$	i	-1

2-) $\{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_i\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & W \\ \{b_i\} & & \{a_i\} \end{array} \quad \begin{cases} f(b_1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ f(b_1+b_2) = a_2 + a_3 \\ f(b_1+b_2+b_3) = 2a_1 + a_3 \\ f(b_1+b_2+b_3+b_4) = 2a_1 + a_2 - a_3 \end{cases}$$

a) Matriz en $\{a_i\}$, $\{b_i\}$

$f(b_2) = a_2 + a_3 - f(b_1) = a_2 + a_3 - a_1 - 2a_2 - 3a_3 =$

$= -a_1 - a_2 - 2a_3$

$f(b_3) = 2a_1 + a_3 - f(b_1+b_2) = 2a_1 + a_3 - a_2 - a_3 = 2a_1 - a_2$

$f(b_4) = 2a_1 + a_2 - a_3 - 2a_1 - a_3 = a_2 - 2a_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Ker f, Im f ¿Es f inyectiva?. ¿Suprayectiva?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+2z=0 \\ y-5z+t=0 \\ -z-3t=0 \end{array}\right\} \quad z=-3t \ , y=-16t \ , x=-10t$$

$\text{Ker} f = \{ (-10, -16, -3)t \ / \ t \in \mathbb{R} \}$

$\text{rg} A = 3 = \dim \text{Im} f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ suprayectiva

pero NO biyectiva pues $\text{Ker} f \neq \{0_4\}$.

c) $g: U_1 \to U_2$ $\quad \dim U_1 > \dim U_2$

$\dim U_1 = \dim U_2$

No

$\dim \text{Ker} g + \dim \text{Im} f = \dim U_1$

Si g suprayectiva $\dim \text{Im} f = \dim U_2$

g inyectiva $\dim \text{Ker} f = 0$

3-)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - (3-\lambda) =$$

$$= (4+\lambda^2-4\lambda)(3-\lambda)-(3-\lambda) = 12+3\lambda^2-12\lambda-4\lambda-\lambda^3+4\lambda^2$$

$$-3+\lambda = -\lambda^3+7\lambda^2-15\lambda+9 = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$$

$\boxed{\lambda=3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad x=z \qquad (x,y,x)$$

$$E_1(3)=\{x(1,0,1)+y(0,1,0) \;/ x,y\in\mathbb{R}\}$$

$\boxed{\lambda=1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases} \qquad (1,0,-1)$$

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R\, AR^{-1} = D$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}}_{D} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$PAP^T = D$$

c) Base ortonormal

```
>>

  To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.

>>
>> [V,D]=eig(A)
??? Undefined function or variable 'A'.

>> A=[2 0 1;0 3 0;1 0 2]

A =

     2     0     1
     0     3     0
     1     0     2

>> [V,D]=eig(A)

V =

    0.7071    0.7071         0
         0         0   -1.0000
   -0.7071    0.7071         0


D =

     1     0     0
     0     3     0
     0     0     3

>> P=[1 0 1;0 1 0;1 0 -1]

P =

     1     0     1
     0     1     0
     1     0    -1

>> P*A*inv(P)

ans =

     3     0     0
     0     3     0
     0     0     1

>>
```

4)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; (A-2I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ¿\, J \text{ t.q. } P^{-1}AP=J\,?$$

$$E_1(2)=\operatorname{Ker}(A-2I)=\{\alpha(1,0,1,0)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

$$E_2(2)=\operatorname{Ker}(A-2I)^2=\{\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,1,0)\ /\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

$$E_3(2)=\operatorname{Ker}(A-2I)^3=\{\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,0)+\gamma(0,0,1,0)\ /\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

$$(A-2I)^4=0 \Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^4=E_4(2)$$

$$u_4\in E_4\setminus E_3(2) \Rightarrow u_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$u_3=(A-2I)u_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2=(A-2I)u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$u_1=(A-2I)u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$Au_1=2u_1$$

$$Au_2=u_1+2u_2$$

$$Au_3=u_2+2u_3$$

$$Au_4=u_3+2u_4$$

$$A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}=(u_1\,u_2\,u_3\,u_4)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}AP=J}$$

El método más habitual utiliza matrices elementales para obtener una matriz diagonal congruente con la matriz coordenada de una forma cuadrática, determinando fácilmente la matriz del cambio a la nueva base. Este método lo denominaremos *método de diagonalización por congruencia*, y consiste en realizar operaciones elementales de congruencia sobre la matriz A coordenada de la forma cuadrática, es decir, efectuar las mismas operaciones elementales sobre las filas y las columnas para llegar a una diagonal congruente.

En la práctica hay que ampliar la matriz A con la matriz unidad y realizar las operaciones elementales de congruencia mencionadas; en el lugar de la matriz unidad quedaran reflejadas las operaciones sobre las filas, es decir, la matriz P que verifica la relación de congruencia:

$$PAP^T = D$$

4.2.1 Ejemplo resuelto

Obtener una matriz diagonal congruente con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

y escribir una base conjugada.

Solución con MATLAB de dos formas distintas:

Introducimos la matriz	
$>> A = [1\ 2\ 0; 2\ 3\ 1; 0\ 1\ 1]$	$>> A = [1\ 2\ 0; 2\ 3\ 1; 0\ 1\ 1]$
$>> P = eye(3)$	$>> P = eye(3)$
Operación por filas en A y P	$>> AP = [A, P]$
$>> A = [A(1,:);\ A(2,:) - 2 * A(1,:);\ A(3,:)]$	$>> AP(2,:) = AP(2,:) - 2 * AP(1,:)$
$>> P = [P(1,:);\ P(2,:) - 2 * P(1,:);\ P(3,:)]$	$>> AP(:,2) = AP(:,2) - 2 * AP(:,1)$
La misma operación por columnas en A	$>> AP(3,:) = AP(3,:) + AP(2,:)$
$>> A = [A(:,1)\ A(:,2) - 2 * A(:,1)\ A(:,3)]$	$>> AP(:,3) = AP(:,3) + AP(:,2)$
Operación por filas en A y P	$>> D = AP(:,1:3)$
$>> A = [A(1,:);\ A(2,:);\ A(3,:) + A(2,:)]$	$>> P = AP(:,4:6)$
$>> P = [P(1,:);\ P(2,:);\ P(3,:) + P(2,:)]$	$>> D == P * A * P'$
La misma operación por columnas en A	
$>> A = [A(:,1)\ A(:,2)\ A(:,3) + A(:,2)]$	

Resultado obtenido:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base conjugada:

$$\{(1,0,0), \quad (-2,1,0), \quad (-2,1,1)\}$$

5.-) $q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(u) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + (\alpha - 1) z^2 + 2xy$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, rango y signatura.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + (\alpha - 1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha - \lambda)^2 (\alpha - 1 - \lambda) + \lambda + 1 - \alpha =$$

$$= \left[(\alpha - \lambda)^2 - 1 \right] (\alpha - 1 - \lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{+2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 1)}}{2} = \alpha \pm 1$$

$\lambda_1 = \alpha + 1$

$\lambda_2 = (\alpha - 1)$ doble

$\alpha \neq 1, -1$ $\quad rg\, A = 3$

$\alpha = 1$ $\quad rg\, A = 1$

$\alpha = -1$ $\quad rg\, A = 2$

$\alpha > 1$ $\quad sg\, A = (3,0)$

$-1 < \alpha < 1$ $\quad sg\, A = (1,2)$

$\alpha < -1$ $\quad sg\, A = (0,3)$