ALGEBRA (Ingeniería Industrial) **Grupos B y C**

3 de septiembre de 2007 **Segunda convocatoria**

Prueba de problemas (67'5%)

1. Se considera el conjunto $C = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$. Estudiar si el conjunto C con el producto habitual es un grupo abeliano.

2. Sean $\{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{b_i\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ las bases canónicas de W y V respectivamente. Se define la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que:

$$\begin{aligned}
&f(b_1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\
&f(b_1 + b_2) = a_2 + a_3 \\
&f(b_1 + b_2 + b_3) = 2a_1 + a_3 \\
&f(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 2a_1 + a_2 - a_3
\end{aligned}$$

   (a) Halla la matriz asociada a f respecto de las bases $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$.

   (b) Determina los subespacios $ker(f)$ e $Im(f)$. ¿Es f inyectiva? ¿y suprayectiva?.

   (c) ¿Puedes encontrar una aplicación lineal biyectiva $g : U_1 \longrightarrow U_2$ siendo $dimU_1 > dimU_2$?. Justifica la respuesta.

   (d) Razona cómo habría que elegir dos bases de V y W de modo que la ecuación de f respecto de dichas bases sea $Y = CX$ con

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Halla, **si existe**:

   (a) una R regular tal que RAR^{-1} es diagonal,

   (b) una S regular tal que SAS^t es diagonal,

   (c) una base ortonormal respecto de F forma bilineal simétrica definida sobre $\mathbb{R}^3$ que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

4. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene como valor propio $\lambda = 2$ cuádruple. Teniendo en cuenta que:

$$A-2\,I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ (A-2\,I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ (A-2\,I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular su forma canónica de Jordan y la matriz regular P tal que $P^{-1}AP = J$.

5. Dada la forma cuadrática definida sobre $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(u) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + (\alpha - 1)z^2 + 2xy$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar el rango y la signatura de q para los distintos valores de α.

Prueba práctica (12'5%)

Dados $V = \mathbb{R}_4[x]$ y los subespacios

$S = \mathbb{R} < \{1+x^2+3x^3, x+4x^2+3x^3, x^3, 3x-x^2\} >$, $T = \mathbb{R} < \{x+2x^3, 1+x^2+x^3-x^4\} >$,

se realizan los siguientes cálculos con MATLAB.

```
>> A=[1 0 0 0 ;0 1 0 3 ;1 4 0 -1 ;3 3 1 0 ;0 0 0 0 ]
A =

     1     0     0     0
     0     1     0     3
     1     4     0    -1
     3     3     1     0
     0     0     0     0

>> rref([A [0 1 0 2 0]' [1 0 1 1 -1]'])
ans =

    1.0000         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0    0.0769         0
         0         0    1.0000         0    1.7692         0
         0         0         0    1.0000    0.3077         0
         0         0         0         0         0    1.0000
```

Contesta a las siguientes preguntas teniendo en cuenta **únicamente** los cálculos anteriores y **sin realizar ninguna operación adicional**.

1. Indica lo que representa la matriz A.
2. Determina una base de $S + T$.
3. ¿Son S y T suma directa?.