CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

Primer parcial, 22 enero, 2003.

Idea de las soluciones.

1. a) Cada l_{ii} puede tomarse con + o - y así resultan 2^n factorizaciones LL^T distintas.

Además si $L_1L_1^T = L_2L_2^T$, entonces $L_2^{-1}L_1 = L_2^TL_1^{-1}$ es diagonal D. Así $L_1 = L_2D$ y por tanto $L_1L_1^T = L_2D^2L_2^T$. De $L_2D^2L_2^T = L_2L_2^T$ multiplicando por las inversas de L_2 y su traspuesta $D^2 = I$ luego $d_{ii} = 1o-1$. Las columnas de L_2 sólo difieren de las de L_1 en el signo.

b) Desarrollando, $p_n = \alpha p_{n-1} - 4p_{n-2}$ con $p_0 = 1$ y $p_1 = \alpha$. Inducción: $p_1 - p_0 = \alpha - 1 > 0$.

$p_n - p_{n-1} = (\alpha - 1)p_{n-1} - 4p_{n-2} > 4(p_{n-1} - p_{n-2}) > 0$.

Por tanto A definida positiva y los valores propios son definidos positivos.

Otra forma: por ejemplo, con los polinomios característicos, se forma la sucesión habitual y al evaluar la sucesión para $\lambda = 0$ salen los p_n de antes, todos ¿0, y para $\lambda \to \infty$ sale +-+-+-.....-+, n alternancias.

c) $l_{11} = \sqrt{\alpha}$, $l_{21} = -2/\sqrt{\alpha}$, $l_{j1} = 0\ \forall j > 2$.

Para $k = 2, ..., n$

$$l_{kk} = \sqrt{\alpha - l_{k,k-1}^2},\ l_{k+1,k} = -2/\sqrt{l_{kk}},\ l_{jk} = 0\ \forall j > k+1.$$

Demostración de las acotaciones por inducción.

L es bidiagonal y triangular inferior.

Elementos diagonales $\sqrt{5}$, $\sqrt{21/5}$, $\sqrt{85/21}$, $\sqrt{341/85}$.

Elementos subdiagonales $-\sqrt{4/5}, -\sqrt{20/21}, -\sqrt{84/85}$

......

2.a) Es la misma demostración que en el caso puntual pero poniendo bloques. En el lema previo sobre invariancia del valor del determinante multiplicar por una matriz diagonal por bloques que son la identidad multiplicada por λ, λ^2,..., λ^r y por la matriz inversa. Vale cualquier sucesión de potencias consecutivas de λ.

b) Los radios espectrales son $\sqrt{5/12}$ y $5/12$ respectivamente. Son convergentes.

c) Primera iteración: componentes 1/2, -17/8, 7/8, -11/12.

Segunda: 9/8, -197/96, 91/96, -139,144.

Se acercan a la solución.

......

3. a) Es continua salvo en el 0. Para $x \to -\infty$ tiende a $-\infty$ y para $x \to \infty$ a 1. Para $x \to 0^-$ tiende a ∞ y para $x \to 0^+$ a $-\infty$.

La derivada es siempre positiva, luego función siempre creciente. La derivada segunda es $-2/x^3 - e^{-x}$. Negativa si $x > 0$, positiva si x es negativo y pequeño en valor absoluto y negativa para $x < -1$. Punto de inflexión entre -0.9 y -1. La gráfica viene desde menos infinito creciendo con concavidad hacia abajo, con un punto de inflexión un poco a la derecha del -1, y con asíntota $x = 0$ en la que tiende a infinito por la izquierda. Hay otra rama de curva que empieza desde menos infinito a la derecha de la asíntota $x = 0$, creciendo, con concavidad hacia abajo, y con asíntota $y = 1$ cuando x tiende a infinito.

Hay dos raíces, una entre -0.9 y -0.5 y la otra entre 1 y 2.

b) $x_0 = 1$ para la positiva, con $x_1 \approx 1.26894...$

$x_0 = -0.5$ para la negativa, con $x_1 \approx -0.739218...$

En ellos se cumplen las condiciones de convergencia global y coinciden en signo F y su segunda derivada.

c) Para x_0 entre menos infinito y la raíz negativa: x_1 está más a la izquierda que x_0 porque $x_1 - x_0 = -F(x_0)/F'(x_0)$ es positivo. Pero no llega a pasar al lado de las x positivas porque en la zona donde podría pasar la pendiente es muy fuerte. Como el punto de inflexión está a la izquierda de la raíz, para algunos valores de x_0 en la zona a la derecha del -1 x_1 se pasa a la derecha de la raíz negativa. Resumiendo: en la zona a la dercha de la raíz negativa hay convergencia hacia ésta. Desde la zona de la izquierda, las iteraciones se van aceercando hacia la raíz pero llega un momento que se pasan un poco a la derecha de la raíz negativa y ya convergen hacia ésta.

Para x_0 positivo y a la izquierda de la raíz positiva hay convergencia hacia ésta. Desde la derecha de la raíz hay una zona en que la siguiente iteración pasa a la izquierda de la raíz positiva y ya converge hacia ésta. Por último para x_0 positivo y grande x_1 pasa a ser negativo y ya se aplica lo dicho arriba.

......