CALCULO NUMERICO, Matem.

Convoc. setbre 2002, 6-9-2002. Parte A

1. a) Es el producto de $A = A_1$ por una matriz: la identidad, sustituyendo el 0 de la posición $(n-1, n)$ por $a_{1n}/a_{1,n-1}$.

b) Se va multiplicando lo anterior a la derecha por otras matrices similares con el 0 de la posición $(n-2, n-1)$ sustituido por $a_{1,n-1}/a_{1,n-2}$, etc hasta la posición (1,2) con a_{12}/a_{11}. Llámese a la matriz obtenida A_2. Se multiplica por otras análogas a las anteriores empezando por la posición $(n-1, n)$ y elemento con y acabando en la (2,3). Atención a los cocientes que reemplazan al 0 en esas posiciones que hay que suponer que su denominador no es nulo. (PREGUNTA: ¿Qué menores de A tienen que ser no nulos para eso?) Así sucesivamente. En total va a haber un producto de A por $n(n-1)/2$ factores.

c) El proceso es $AV = L$ con V triangular superior con diagonal 1 y L triang. inferior. La factorización es $A = LW$ con W triangular superior con diagonal 1.

d) El proceso es

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Para la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde el segundo factor es el producto de los tres últimos del primer miembro de arriba en orden inverso y con el elemento extradiagonal cambiado de signo.

......

2. a) $|a + 2bc| < 2|a||d|$.

b) $b = c$. De la positividad de los menores principales de orden 2 y 3 de la matriz del sistema se puede deducir con pocos cálculos que se cumple a).

c) Jacobi tiene radio espectral $\sqrt{0}.5$, Gauss-Seidel 0.5 y relajación con parámetro $\omega = 1.1$, tiene un polinomio característico de grado 3 con un factor $\lambda + 0.1$. Un valor propio es 0.1y los otros las raíces de una ecuación de segundo grado. El radio espectral es 0.37.... En este sistema el más rápido es relajación, luego GS y luego J. El óptimo sale con $\omega \approx 1.17$.

d) -2, 3, -1.5. La solución exacta es -3,4,-2 y GS se acerca rápidamente a ella.

......

3. a) 3

b) $2x^3 + 3x^2 - 6x - 1$. Cota para él es 2, por tanto para el de a) los ceros están en [-2,3].

c) $2 - 3t - 6t^2 + t^3$. Cota 7 luego para a)1/7.

$-2 - 3t + 6t^2 + t^3$ los tiene opuestos e inversos. Una cota para él es 1. En resumen para el de a) están en [-2,-1] y [1/7, 3].

d) Sucesión $2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$, $6x^2 - 6x - 6$, $5x$ y 6. En [-2,-1], [0,1] y [2,3]. Con la secante en [2,3] resulta 41/17 o sea 2.41...