CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

6 de junio de 2002.Parte 1

ALGUNAS IDEAS PARA RESOLVER. (Salvo posibles e inadvertidos errores de cálculo)

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La otra no se puede

b) Cierto para 1. Suponiendo hasta orden $n-1$, partir A en cajas separando $n-1$ y 1 filas y 1 y $n-1$ columnas y los factores, uno en $n-1$ y 1 filas y 1 y $n-1$ columnas y el segundo en 1 y $n-1$ filas y 1 y $n-1$ columnas para que ajusten bien. Sale la descomposición posible siempre que sean no nulos los menores formados por las k primeras filas y k últimas columnas, para todo k.

c) Como en a), se descompone en dos sistemas triangulares sucesivos. El primero da la solución -3,-1,1 y el segundo da ya la correcta, -3, -4,2.

d) Se ponen bloques de 3 y 1 filas y 1 y 3 columnas en A. Al plantear el producto, con el primer factor en bloques de 3 y 1 filas y 1 y 3 columnas y el segundo factor de 1 y 3 filas y 1 y 3 columnas, usando los resultados de a) y b) sale inmediato:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

......

2. Determinante de $\lambda M - N$ es $(4\lambda+1)(2(4\lambda+1)^2 - 2\lambda)$. Sus ceros -1/4 y las dos raíces complejas de la ecuación $(4\lambda+1)^2 - \lambda = 0$ cuyo módulo es 1/4. Así el radio espectral de la matriz del método es 1/4, método convergente, porque evidentemente es consistente.

b) Corresponde a $\omega = 5/4$ y por ser simétrica definida positiva es convergente para $0 < \omega < 2$.

c) Gauss-Seidel tiene radio espectral 1/25. Por tanto Gauss-Seidel es más rápido. El más rápido (ver las tridiagonales en el curso) corresponde a $\omega = 10/(5+\sqrt{2}4)$ porque el radio espectral del mét. Jacobi es 1/5 (ver curso, tridiagonales). .

3. a) Al pedir $4^{1/3} = g(4^{1/3})$ y $g'(4^{1/3}) = 0$ sale $a = 2, b = 0$ y $a = -1, b = -3 * 4^{1/3}$, siendo esta absurda para nuestra calculadora. b) Al hacer la gráfica, que no cambia de concavidad, la convergencia desde todo punto positivo está clara.

c) Resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = 1/(4^{1/3})$$

.