EJERCICIOS DE CÁLCULO NUMÉRICO, Diplomat. Estadística

1. Hallar el polinomios de interpolación de Taylor de grado n de las siguientes funciones con los datos de interpolación en el correspondiente punto x_0:

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

===++++===

2. Acotar el error en cada una de las funciones anteriores en un intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$ y comprobarlo para valores bajos de n en puntos cercanos a x_0.

===++++===

3. Usando la siguiente tabla de valores del seno de un ángulo en grados, por interpolación lineal y cuadrática hallar aproximadamente mediante la fórmula de Lagrange el seno de 72 grados

x	65	70	75
y	0.906308	0.939693	0.965926

.

===++++===

4. Con la siguiente tabla de valores de la función exponencial e^x, usar la fórmula de Lagrange para calcular aproximadamente $e^{0.75}$ mediante interpolación lineal y cuadrática

x	0	1/2	1
y	1	1.6487213	2.7182818

.

Dar primero los correspondientes polinomios interpoladores $p_1(x)$ y $p_2(x)$ y luego evaluarlos para el valor pedido.

===++++===

5. Acotar el error de interpolación en el ejercicio anterior en el intervalo [0, 1] y comprobar que se verifican las cotas en los resultados obtenidos.

===++++===

6. Resolver los ejercicios 3 y 4 mediante la fórmula de Newton.

===++++===

7. En esos ejercicios 3 y 4 se va a usar un valor más de la función. Concretamente el seno de 80 grados, 0.984808, en el ejercicio 3 y $e^{1.5} = 4.4816891$ en el 4. Repetir los razonamientos de los ejercicios 3, 4 y 6 para ver la diferencia de trabajo a realizar en unos y otros.

===++++===

8. Si en un problema de interpolación con datos $f(x_i)$, $0 \leq n$, la propia función f es un polinomio de grado no mayor que n ¿qué polinomio de interpolación se obtendrá?.

===++++===

9. Si con los datos $f(x_i)$, $0 \leq n$, se buscase un polinomio de interpolación de grado no mayor que $n+1$ ya se obtendrían infinitas soluciones. Escribir en una fórmula todos los polinomios solución. (Idea: ver cómo es la diferencia entre una cualquiera de esas soluciones y el polinomio interpolador p_n de grado no mayor que n.). Escribir a continuación todos los polinomios de grado cualquiera que coinciden con f en aquellos datos.

===++++===

10. a) Usando los valores de una función f en dos puntos x_0, x_1 se desea hacer interpolación lineal para calcular aproximadamente valores de f en puntos intermedios entre aquellos. Si f tiene derivada continua de segundo orden en $[x_0, x_1]$, hallar una cota lo más ajustada posible del error de interpolación.

b) La misma cuestión si se tiene una tabla de valores de f en un rango $[a, b]$ con espaciamiento h entre abscisas consecutivas y se va a hacer interpolación lineal para las abscisas intermedias, suponiendo la continidad de la derivada seginda de f en $[a, b]$.

===++++===

11. Se va a construír una tabla de valores de la función $f(x) = \sqrt{x}$ entre 10 y 100 con los valores de la tabla evaluados con error menor que 10^{-6}. Teniendo en cuenta el ejercicio 10 b) hallar qué espaciamiento deben tener las abscisas en esa tabla para que el error de interpolación lineal no sea superior al error de evaluación de la tabla.

===++++===

12. Sea $p_1(x)$ el polinomio de grado 2 que interpola a una función f en los puntos 1, 3 y 6 y $p_2(x)$ el que lo hace en los puntos 1, 3 y 4. Probar que el polinomio

$$p(x) = \frac{x-4}{2} p_1(x) - \frac{x-6}{2} p_2(x)$$

es el polinomio de interpolación de f en los puntos 1,3,4 y 6.