CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

Primer parcial, 22 enero, 2003.

1. Sea A una matriz simétrica definida positiva.

a) Demostrar que si en la descomposición de Cholesky no se fija el signo de la diagonal de L, pueden realizarse exactamente 2^n factorizaciones LL^T distintas, indicando en qué se diferencian unas de otras.

b) Sea A la matriz simétrica tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & \alpha & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & \alpha & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & -2 & \alpha & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix},$$

con $\alpha \geq 5$. Demostrar que los menores principales de A forman una sucesión estrictamente creciente de números positivos y que los valores propios de A son todos positivos (esto último razonado al menos de dos maneras diferentes).

c) Dar en forma algorítmica la descomposición de Cholesky de A con diagonal positiva indicando todos los elementos nulos y probar que se tendrá $l_{jj} \geq 2\ \forall j$ y $|l_{jk}| \leq 1\ \forall j > k$. En particular dar la descomposición para $n = 4$ y $\alpha = 5$.

......

2. Sea A una matriz con una partición en bloques que la hace ser tridiagonal por bloques:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & A_{r-1,r-2} & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{r,r-1} & A_{rr} \end{pmatrix}$$

y se va a resolver un sistema $Ax = b$.

a) Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel por bloques (con la partición anterior) son ambos convergentes o ninguno lo es, y hallar la relación entre los radios espectrales de las matrices de ambos métodos.

b) Comprobar el resultado de a) estudiando la convergencia de ambos métodos para el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

con una partición de 1,2 y 1 filas y las mismas columnas.

c) Hallar las dos primeras iteraciones del método de Gauss-Seidel por bloques con la partición anterior, en el sistema de b) y partiendo del vector inicial nulo. (Solución exacta del sistema, 1,-2,1,-1).

......

3. a) Dibujar la gráfica de la función

$$F(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$$

después de hacer un estudio completo de ella y determinar cuántos ceros reales tiene, localizando cada uno de ellos en un intervalo de amplitud no mayor que 1.

b) Para cada raíz de la ecuación $F(x) = 0$ dar un valor concreto que tomado como valor inicial en el método de Newton dé lugar a convergencia, y aplicarlo para hallar una iteración.

c) Basándose en la gráfica de a), discutir la convergencia del método de Newton para cualquier valor inicial $x_0 \neq 0$.

......

Valoración máxima de cada apartado:

1. a) 0.7; b) 1.3; c)1.3 Total: 3.3

2. Cada apartado 1.1. Total 3.3

3. a) 1.3; b)1; c)1.1. Total 3.4