CALCULO NUMERICO, Matem.

Convoc. setbre 2002, 6-9-2002. Parte A

1. Sea A una matriz cuadrada de orden n no singular, de elementos $\{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$.

a) Suponiendo que $a_{1,n-1} \neq 0$, describir el producto matricial que le resta a la última columna un múltiplo adecuado de la penúltima para producirle un cero en la posición $(1, n)$.

b) Suponiendo que también $a_{1,n-2} \neq 0$ se le suma a la columna $n-1$ un múltiplo de la $n-2$ y así sucesivamente hasta dejar la primera fila sólo con el primer elemento no nulo. Luego se continuará por la segunda fila sumándole a cada columna un múltiplo de la anterior, de derecha a izquierda, y así sucesivamente, con las hipótesis adecuadas, hasta llevar la matriz a forma triangular inferior. Describir matricialmente el proceso.

c) ¿Qué factorización en triangulares produce el proceso anterior?

d) Aplicar este método para llevar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a forma triangular inferior y para factorizarla como en c).

......

2. Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

con a, d no nulos:

a) Dar una condición necesaria y suficiente que tienen que cumplir a, b, c, d para que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel sean convergentes.

b) Demostrar que la condición de a) se cumple si la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva o estrictamente diagonal dominante.

c) Sea $a = 2, b = 1, c = 3, d = 4, p = -2, q = 5, r = 0$. De los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación con parámetro $\omega = 1.1$, decir cuál es asintóticamente más rápido y cuál el que menos. Decir cuál sería el mejor valor de ω a este respecto.

d) Calcular $x^{(2)}$ en el método de Gauss-Seidel partiendo del vector inicial nulo.

......

3. a) Aplicar el algoritmo de Horner para hallar una cota superior de los ceros positivos del polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

b) Escribir el polinomio que tiene los ceros opuestos a los de p y usar la idea de a) para dar una cota inferior de los ceros negativos de p.

c) Escribir el polinomio que tiene ceros inversos de los de p. Usar las ideas de a) y b) para dar una cota inferior de los ceros positivos y una superior de los ceros negativos.

d) Localizar los ceros de p en intervalos de amplitud 1 usando las sucesiones de Sturm y después usar el método de la secante para dar una primera aproximación de la mayor de las raíces.

. . . . . .

Valoración máxima de cada apartado:

1. a)0.6; b)1.2; c) 0.7; D)1. TOTAL 3.5
2. a) 0.8 ;b)1; c) 1.2; d) 0.5. TOTAL 3.5
3. a)0.6; b)0.5; c)0.7; d) 1.2. TOTAL 3

CALCULO NUMERICO, Matem.

Convoc. setbre 2002. 6-9-2002. Parte B

1.a) Demostrar que el polinomio $p(x)$ de grado no mayor que n que interpola a una función f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, todos distintos, queda unívocamente determinado por la igualdad

$$\begin{vmatrix} p(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

b) Escribir la correspondiente igualdad para el polinomio de interpolación de Hermite con dos datos de interpolación $f(x_i), f'(x_i)$ en cada unos de los mismos puntos.

c) Usar la idea de b) para calcular el polinomio p de grado no mayor que 2 tal que $p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(1) = f'(1)$ con $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 1$.

......

2. Hallar la mejor aproximación $p(x)$ por mínimos cuadrados de $\ln x$ en [1,2] entre los polinomios de grado no mayor que 1 que coinciden con la función para $x = 1$, y hallar el valor máximo del error $|f(x) - p(x)|$ en ese intervalo.

......

3. a) Hallar los coeficientes de la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(1) + a_2 f'(1), \tag{2}$$

para que sea del grado máximo de exactitud posible con esos datos $f(0), f(1), f'(1)$.

b) Construir la solución del problema de interpolación de f por polinomios de grado no mayor que 2 con datos de interpolación $f(0), f(1), f'(1)$ e integrarla entre 0 y 1. ¿Sale la misma fórmula (2) que en a)?

c) Teniendo en cuenta b) dar la expresión del error de la fórmula (2) de forma que se vea el grado de exactitud de la fórmula.

......

4. a) Se tiene una función g definida para valores enteros $x_j = j$, tal que en x_0 vale 1 y en los demás $x_j, \quad j \neq 0$ vale 0. Hallar $\Delta^k g(x_j)$ en función de j y k.

b) Sea f una función definida en la malla anterior. Supongamos que se comete un error ϵ en su evaluación en el punto x_0. De a) deducir cómo influirá ese error en el cálculo de $\Delta^k f(x_0)$.

c) Hallar la diferencia finita $\Delta^j y_n$ de la sucesión $\{y_n\}_0^\infty$ con $y_n = \frac{1}{n+1}$.
d) Usar el resultado de c) con $j = 1$ para hacer la suma

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

y por paso al límite

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\ldots\ldots$

Valoración máxima de cada apartado:

1. a)0.5; b)1; c)1. TOTAL 2.5
2. TOTAL 2
3. a)0.9; b)0.7; c)0.9. TOTAL 2.5
4. a)0.7; b)0.8; c)0.7;d)0.8. TOTAL 3