CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

6 de junio de 2002.Parte 1

1. Se desea estudiar la descomposición de una matriz $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ de orden n en la forma $A = BC$ con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

y con $b_{i,n-i+1} \neq 0$, para $1 \le i \le n$.

a) Verificar si es posible la descomposición de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y de } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Realizar por inducción la demostración de que la descomposición es posible si y si sólo si ciertos menores de A son distintos de cero. Partir A en cajas separando $n-1$ y 1 filas y 1 y $n-1$ columnas.

c) Resolver el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

descomponiendo A en la forma BC.

d) Usar el resultado de a) y b) para descomponer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con muy pocos cálculos.

......

2. Se desea usar un método iterativo para resolver un sistema lineal $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

descomponiendo $A = M - N$ con

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Estudiar la convergencia del método y calcular las dos primeras iteraciones partiendo del vector inicial nulo.

b) Averiguar si resulta ser el método de relajación para algún valor de ω y si con ello se podría haber estudiado directamente la convergencia.

c) ¿Es asintóticamente más rápido o más lento que el método de Gauss-Seidel?. ¿Hay algún método más rápido que ambos?

……

3. a) Hallar a y b para que el método

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^3 + 4}{3x_n^2 + b} \tag{1}$$

proporcione convergencia hacia $4^{1/3}$ en una calculadora que no tiene cálculo de raíces, con el orden lo más elevado posible. Analizar todas las posibilidades y descartar la que no pueda usarse en esa calculadora.

b) Hacer una gráfica aproximada de la función $g(x) = \frac{ax^3+4}{3x^2+b}$, hallada en a) para $x > 0$ y razonar gráficamente la convergencia del método (1) para cualquier $x_0 > 0$.

c) Llamando $e_n = x_n - 4^{1/3}$ hallar en (1) la relación entre e_{n+1} y e_n, hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2}$$

y comprobar así el orden hallado en a).

……

Valoración máxima de cada apartado:

1. a)0.6; b)1.3; c) 0.6; D)1.2. TOTAL 3.7

2. a) 1.3;b)1.1; c) 1.4. TOTAL 3.8

3. a)0.8; b)0.9; c)0.8. TOTAL 2.5

CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

6 de junio de 2002.Parte 2

1. Sea f la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x > 0. \tag{1}$$

a) Demostrar por inducción que para puntos $x_0, x_1, \dots x_n$ cualesquiera, distintos o no, las diferencias divididas de f verifican

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = K_n f(x_0) f(x_1), \dots f(x_n)$$

con K_n dependiente sólo de n, hallando K_n.

b) Usando a) para calcular las diferencias divididas, construír por fórmula de Newton el polinomio de interpolación de grado no mayor que 2 de f con datos $f(0), f(2), f(4)$, y y el de grado no mayor que 3 con datos $f(0), f(2), f(4), f'(4)$. Comprobar que coinciden con f en esos datos,

c) En este apartado y en el siguiente se quiere acotar el error de interpolación en el primero de los dos casos de b) para cualquier $x \in [0, 4]$. En la expresión del error

$$f[0, 2, 4, x]x(x-2)(x-4) \tag{2}$$

acotar el primer factor de dos formas distintas: una, usando el resultado de a) para las diferncias divididas y acotando la expresión resultante en [0,4]; la otra, pasando la dif. dividida a una derivada y acotando ésta en el mismo intervalo.

d) Acotar la parte polinómica de (2) en [0,4], hallando su máximo valor absoluto en ese intervalo. Teniendo en cuenta c) dar dos cotas distintas del error de interpolación. Comprobar las cotas hallando el error de interpolación en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

e)Atendiendo SÓLO a la parte polinómica del error (2), decir quiénes serían los 3 puntos de [0,4] que sustituyendo a 0,2,4 darían el máximo valor absoluto más bajo posible en [0,4] y decir cuál sería éste.

f) Demostrar que el polinomio de interpolación de grado no mayor que n de la función f en los puntos $x_0, x_1, \dots x_n$, distintos o no pero todos en $[0, 1/2]$, converge hacia f cuando $n \to \infty$ para todo punto x de ese mismo intervalo.

......

2.Se quiere calcular $\int_3^6 \frac{dx}{x+1}$, con error menor que 0.01, usando la fórmula de trapecios compuesta.

a) Demostrar que hay un valor entero del paso h que garantiza esto y aplicar la fórmula con ese paso para calcular la integral.

b) Aplicar extrapolación de Richardson (o método de Romberg) con la mitad del paso anterior y usarlo para dar un valor más ajustado de la integral, comprobando que lo es.

c) Comparar el valor anterior con el obtenido mediante la fórmula gaussiana con solo dos puntos.

. . . . . .

3. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la superficie $z = x^2 + y^2$ mediante planos $z = \alpha x + \beta y - 1$ en el recinto triangular D del plano OXY limitado por el eje OX, y las rectas $x = 1$ e $y = x$.

. . . . . .

Valoración máxima de cada apartado:

1.a) hasta e) 0.8 cada apartado y f) 1. TOTAL 5

2. 1 punto cada apartado. TOTAL 3

3. TOTAL 2