CALCULO NUMERICO, Matem.

Convoc. julio 2002. 26-6-2002. Parte A

1.a) Demostrar que la columna i-ésima de una matriz A es proporcional al vector canónico e_i si y solo si éste último es vector propio de A.

b) Supongamos que se conoce un vector propio v de A y que se construye la matriz de Householder H que transforma v en e_n. De las propiedades de H, deducir que e_n es vector propio de HAH.

c) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 11 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 8 & 10 \\ 1 & 8 & 15 & 8 \\ 1 & 10 & 8 & 13 \end{pmatrix},$$

con vector propio $v = (1, 1, 1, 1)^T$, calcular la matriz H de b). Después razonar, sin calcularlas explícitamente, cómo serán la última fila y la última columna de HAH. NOTA: De las dos opciones para u en la matriz H se tomará la que tiene componentes racionales.

d) Explicar qué utilidad puede tener esta idea si se buscan todos los valores propios de la matriz A y también cómo quedarían la última fila y columna de HAH si A no fuera simétrica.

......

2.Tómese una calculadora en modo radianes y un número cualquiera α, calcúlese el seno y después súmesele 1. A la cantidad obtenida calcúlesele el seno y después súmesele 1, y así sucesivamente.

a) Estudiar qué ecuación se está resolviendo así y razonar si siempre sucederá lo mismo, independientemente del valor inicial tomado. Dar además una explicación gráfica.

b) Dar otro método para calcular la solución de la ecuación de a) más rápido que el anterior, estudiando su convergencia y las posibles rstricciones de ésta y dando además un valor inicial que garantice la convergencia.

......

3. a) Estudiar la convergencia del método de Jacobi por bloques partiendo las filas y las columnas en 2 y 1 para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y calcular la primera iteración partiendo del vector inicial $(1, -1, 1)^T$.

b) Entre el método anterior y el de Gauss-Seidel por los mismos bloques y el método de Gauss-Seidel puntual ¿cuál es asintóticamente más rápido?

c) Sin ningún cálculo de radios espectrales ¿se podía haber asegurado ña convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel puntuales para este sistema?

......

Valoración máxima: 1. a)0.3; b)0.8; c) 1; d)0.9. TOTAL 3

2. a) 2;b)2. TOTAL 4

3. a)1; b)1; c)1. TOTAL 3

CALCULO NUMERICO, Matem.

Convoc. julio 2002. 26-6-02. Parte B

1. a) Estudiar si la función

$$s(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d, & 0 \leq x < 1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d + e(x-1)^3 & 1 \leq x < 2 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d + e(x-1)^3 + m(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad (1)$$

con a, b, c, d, e, m reales cualesquiera es un spline cúbico de nudos 0,1,2,3.

b) Razonar si las funciones de ese tipo forman espacio vectorial y dar su dimensión.

c) Dar las condiciones que tienen que cumplir los a, b, c, d, e, m para que s sea spline cúbico natural. ¿Forman subespacio vectorial los splines cúbicos naturales con nudos 0,1,2,3?

d) Hallar el spline cúbico natural $s(x)$ en la forma (1) que para 0,1,2,3 valga, respectivamente, 0,-1,-1,0.

......

2. a) Hallar la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(x_1), \qquad (2)$$

de grado máximo de exactitud, indicando cuál es éste.

b) Mediante un cambio de variable dar la correspondiente fórmula para $[a, b]$ y para ésta demostrar que el error se puede expresar en la forma $K_1 f''(\xi_1) - K_2 f''(\xi_2)$ con K_1 y K_2 del mismo signo, y finalmente dar una cota del error del tipo $AM(b-a)^k$ con M cota superior de f'' en $[a, b]$ y A número real positivo.

c) Escribir la fórmula compuesta para calcular aproximadamente $\int_a^b f(x)dx$ dividiendo $[a, b]$ en n intervalos de amplitud h y aplicando la fórmula anterior. Dar una cota del error.

NOTA. En b) se recomienda calcular las integrales de polinomios de grado no mayor que 3 mediante la fórmula de Simpson.

......

3.a) Obtener, mediante la fórmula de Taylor-Mac Laurin, un polinomio p de grado no mayor que 2 que aproxime a $f(x) = 1/(3+x)$ en $[-1, 1]$. Acotar el error. Después obtener la mejor aproximación uniforme q en $[-1, 1]$ de p mediante polinomios de grado uno. Demostrar que el error de aproximación $\|f - q\|$ en $[-1, 1]$ es menor que 0.09.

b) Obtener la mejor aproximación uniforme de $1/(3+x)$ por polinomios de grado no mayor que 1 en $[-1, 1]$, comprobar si coincide con el polinomio q de a), y demostrar que el error de aproximación es menor que 0.022.

......

Valoración máxima de cada apartado:

1. a)b)c)0.7; d)1.2. TOTAL 3.3

2. a)b)c)1.1. TOTAL 3.3

3. a) b)1.7. TOTAL 3.4