CÁLCULO NUMÉRICO, MATEMÁTICAS

Primer parcial, 30 enero, 2002.

1.a) Demostrar que el método de Householder puede adaptarse para producir una descomposición de una matriz A regular de orden n como producto QV de una matriz ortogonal por una matriz V tal que $v_{ij} = 0$ si $i + j \leq n$.

b) Explicar cómo se resolvería un sistema lineal $Ax = b$ con A regular usando esta descomposición.

. . . . . .

2. Se dispone de dos métodos iterativos

$$x^{(m+1)} = B_1 x^{(m)} + c_1, \qquad (1)$$

$$x^{(m+1)} = B_2 x^{(m)} + c_2, \qquad (2)$$

convergentes para resolver un sistema lineal $Ax = b$, y se desea construir un nuevo método de la siguiente forma: Para $m \geq 0$:

1) Se calcula $x^{(m+1/2)} = B_1 x^{(m)} + c_1$.

2) Se calcula $x^{(m+1)} = B_2 x^{(m+1/2)} + c_2$.

a) Escribir el método en la forma habitual

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + c, \qquad (3)$$

indicando si este método (3) sería consistente con el sistema lineal.

b) Supóngase que A es estrictamente diagonal-dominante y que los métodos (1) y (2) son, respectivamente, los de Jacobi y Gauss-Seidel. Razonar si el método compuesto (3) será convergente.

c) Calcular $x^{(1)}$ en el método de b), partiendo del vector inicial $x^{(0)}$ nulo, para la resolución del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Supóngase ahora que las matrices B_1 y B_2 de los métodos (1) y (2) son simétricas. Usar la norma matricial espectral para deducir la convergencia del método (3).

. . . . . .

3. Se desea hallar las raíces reales de la ecuación

$$\ln^2 x - x - 1 = 0.$$

a) Hacer una gráfica aproximada de la función $f(x) = \ln^2 x - x - 1$, deducir cuántas raíces reales tiene y localizarlas en intervalos de amplitud 1.

b) Se busca la raíz menor de la ecuación. De la interpretación gráfica del método de Newton, hallar el valor máximo de α tal que si $x_0 \in (0, \alpha)$ el método es convergente.

c) Usando un valor inicial x_0 para el que el método de Newton sea convergente, de acuerdo con b), hallar la raíz más 'pequeña de la ecuación dada con 5 decimales correctos.

d) Razonar brevemente si alguno de los siguientes métodos

$$x_{n+1} = \ln^2 x_n - 1$$

$$x_{n+1} = \frac{\ln^2 x_n - 1}{10}$$

sería localmente convergente para esa raíz hallada en c).

......

Valoración máxima de cada apartado:

1. a) 2.8; b) 0.4. Total: 3.2

2. Cada apartado 0.8. Total 3.2

3. a)b)1.1; c)d) 0.7. Total 3.6