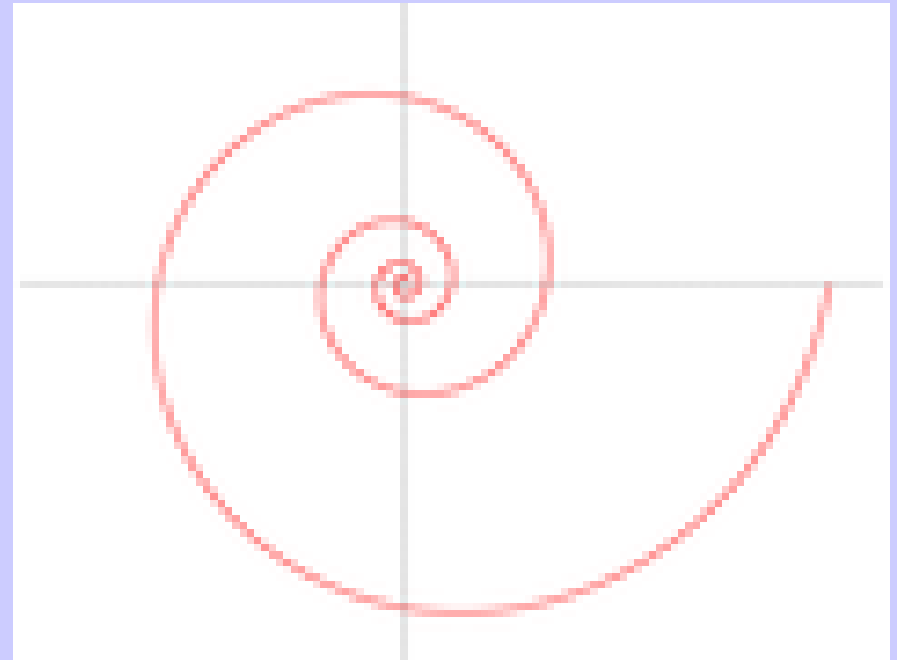


# **MATEMÁTICAS EN LA NATURALEZA**

# Espirales y hélices

**Espiral:** curva que se inicia en un punto central, y se va alejando del centro a la vez que gira alrededor de él. Ejplos: arquimediana y logarítmica

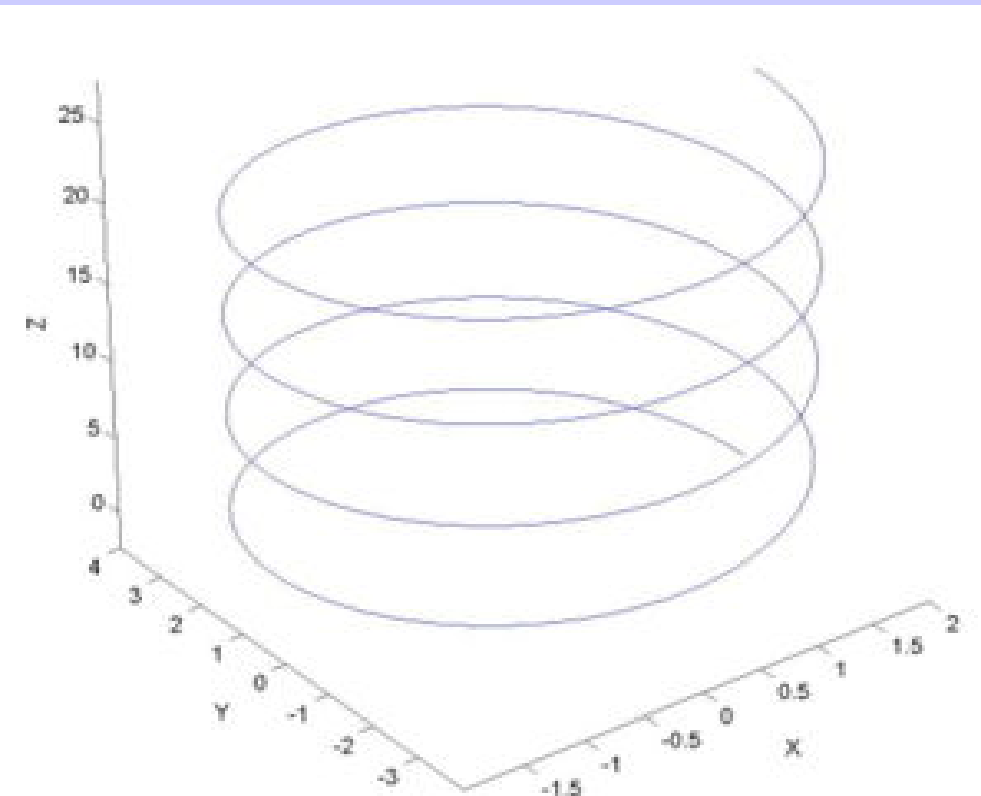


**Suelen ser planas, como el surco de un disco de música.**

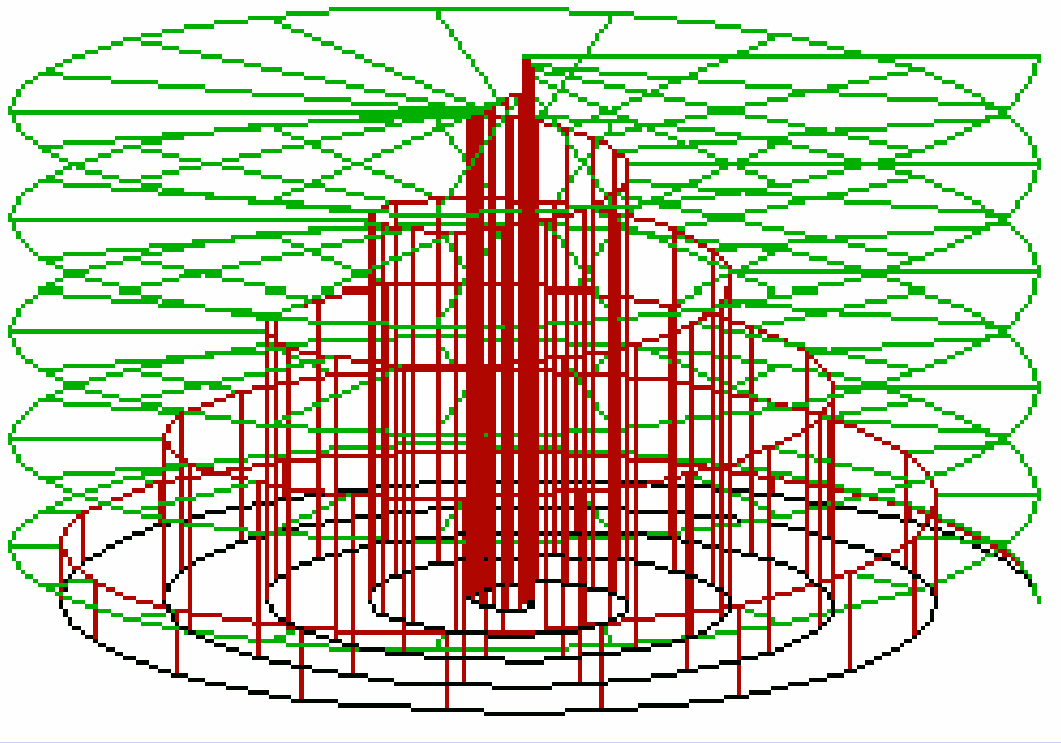
**Pero pueden ser tridimensionales (“muelles” Navidad)**



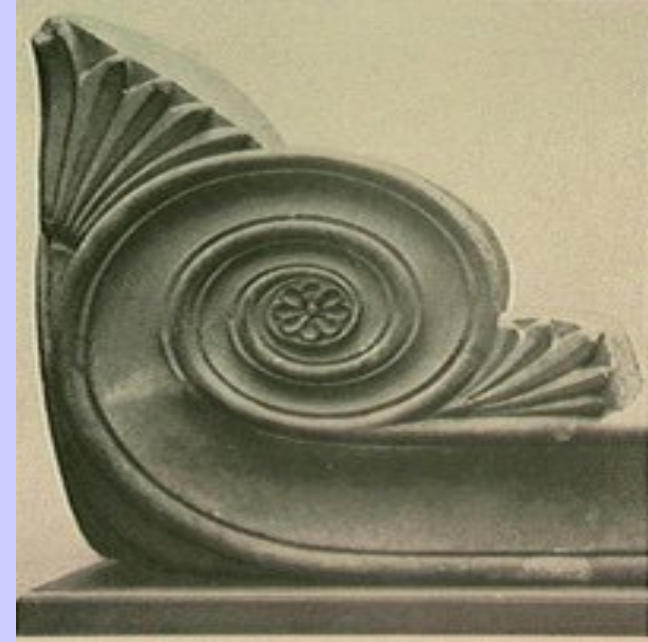
La hélice (curva geométrica, no utensilio) es tridimensional. La más frecuente cilíndrica: (muelle, tornillo?)



Esp. Arquimed.  
Helices cilíndrica  
y cónica.



La hélice cónica puede considerarse espiral tridimensional. Comúnmente se habla de “espirales”.



Símbolismos: Arte megalítico. Dedo o punzón dibujando? Observacion naturaleza?

# **Las espirales en la Naturaleza**

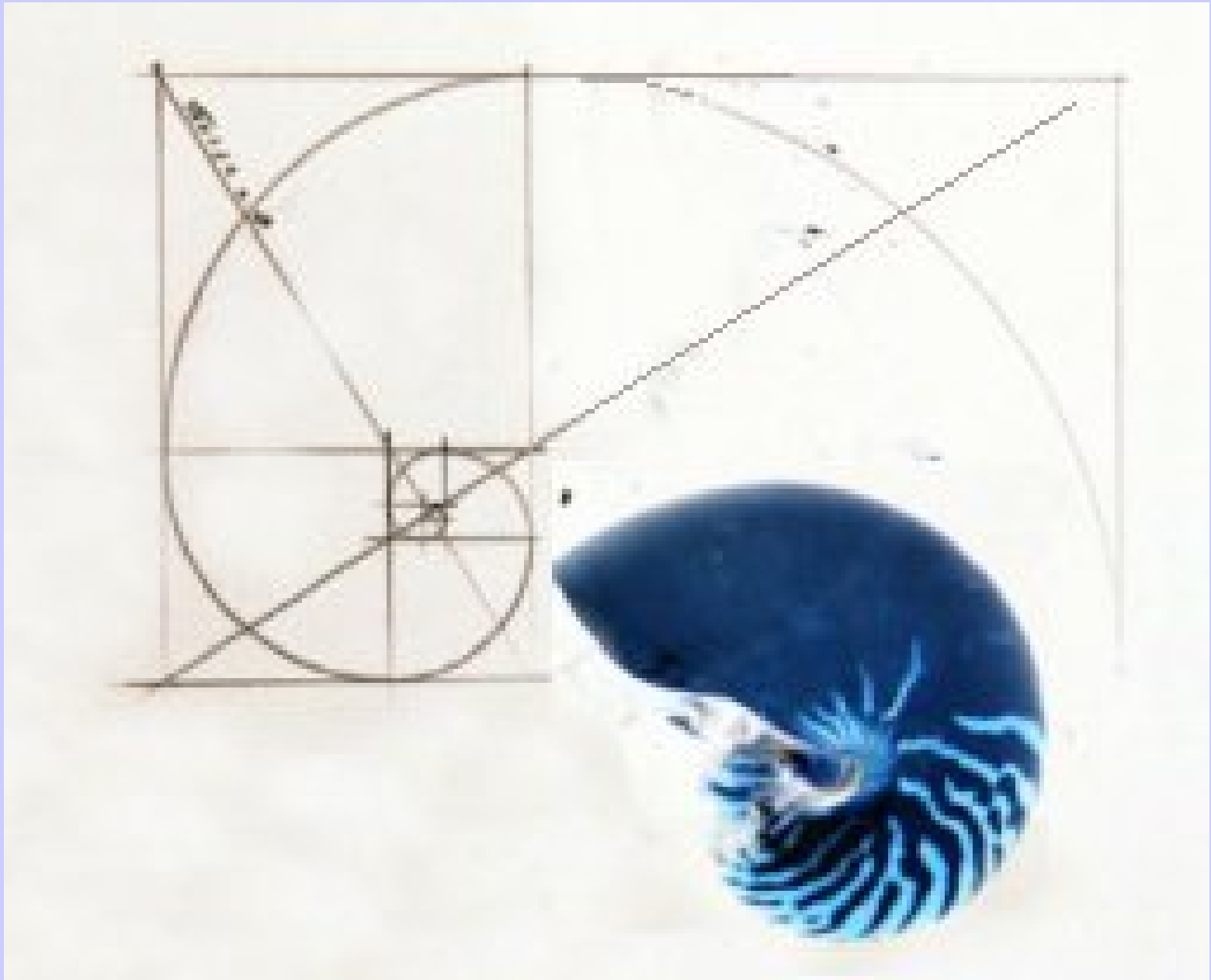




# Ammonites

**Molusco**  
**Nautilus**  
**(Cefalópodo)**



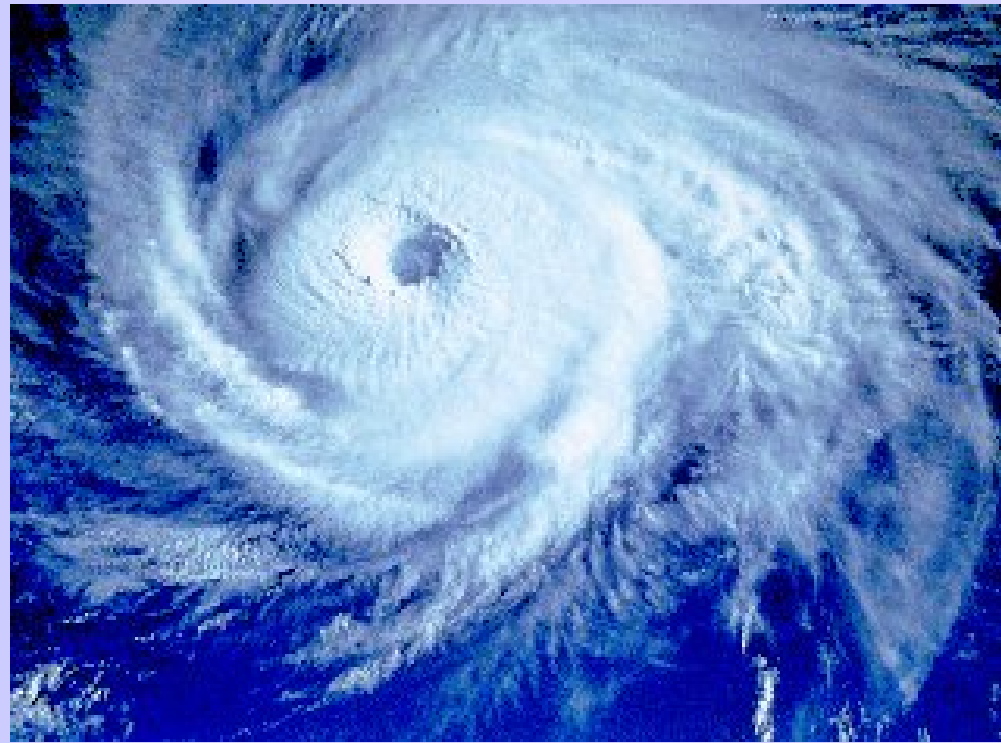




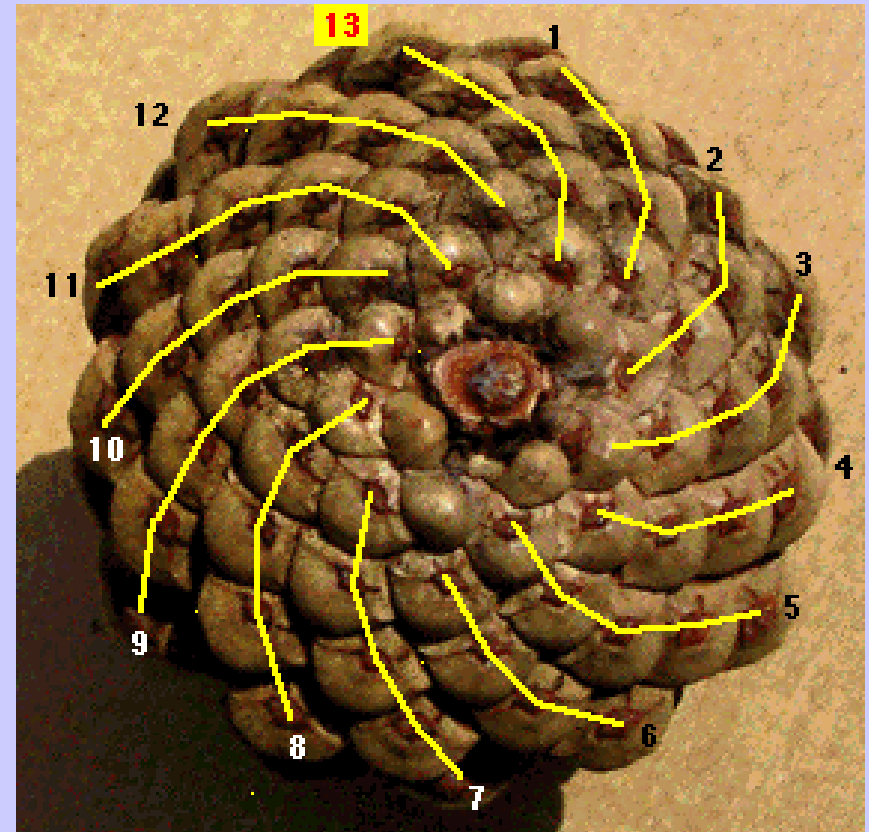
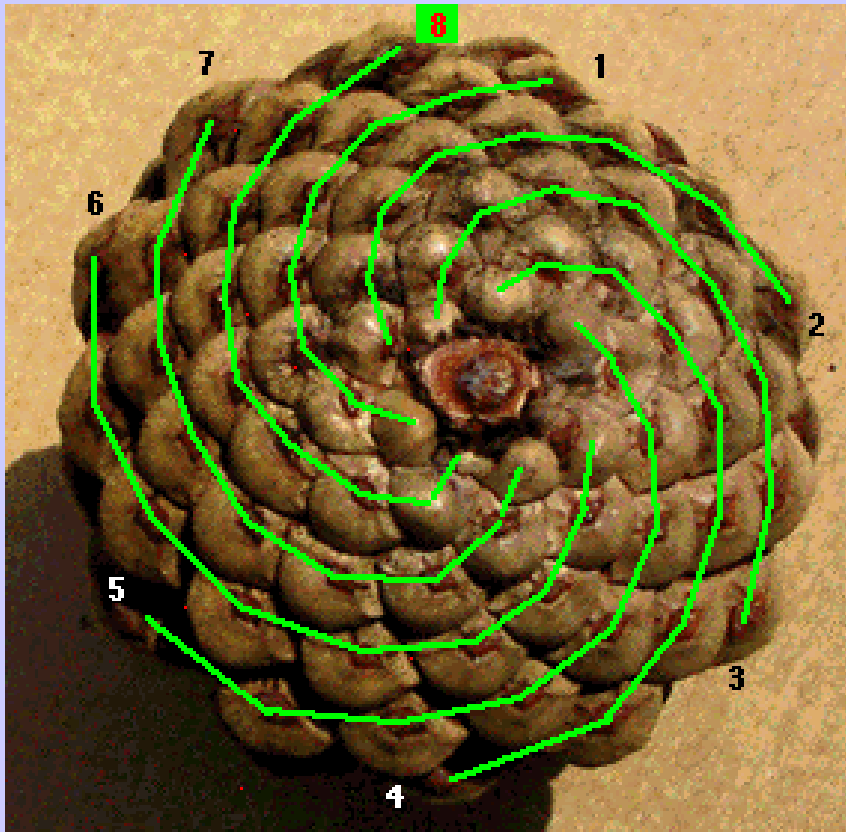


### ¡Caracoles!

O casi. En realidad, la imagen es la de una concha –conocida en los arrecifes de coral del sur del Pacífico como *Nautilus pompilius*– cuyo corte transversal revela una línea de nácar que forma una perfecta espiral. Este fósil viviente, que al igual que otros cefalópodos se alimenta de peces, crustáceos y carroña –comida que detecta, principalmente, a través del olfato–, es una especie nocturna que, aunque 'trabaja' cerca de la superficie, puede habitar a 500 metros de profundidad y, cosa inusual, vivir hasta 20 años. ■ RAFA GASSÓ



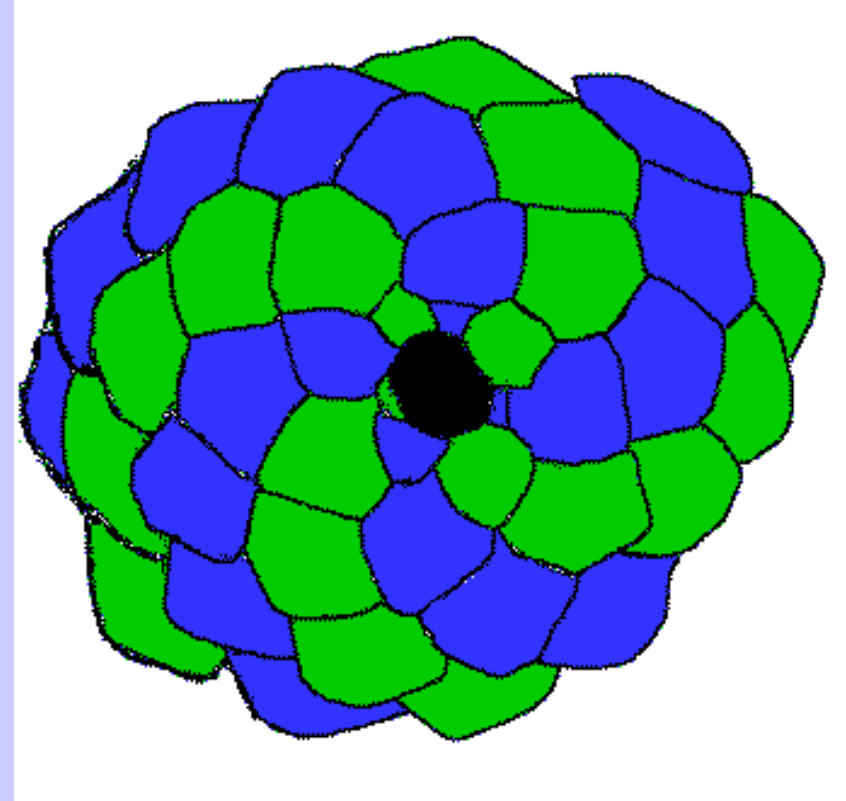
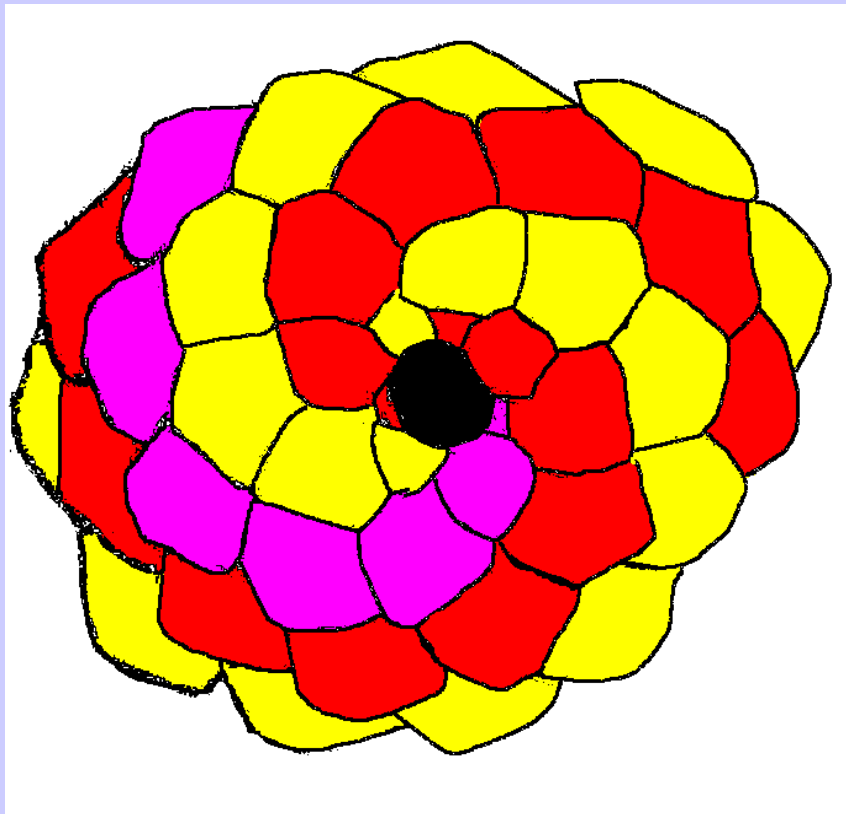
# **Piñas de coníferas:**



8 espirales verdes con giro agujas reloj y 13 rojas, con giro contrario.







5 en sentido agujas, 8 en contra



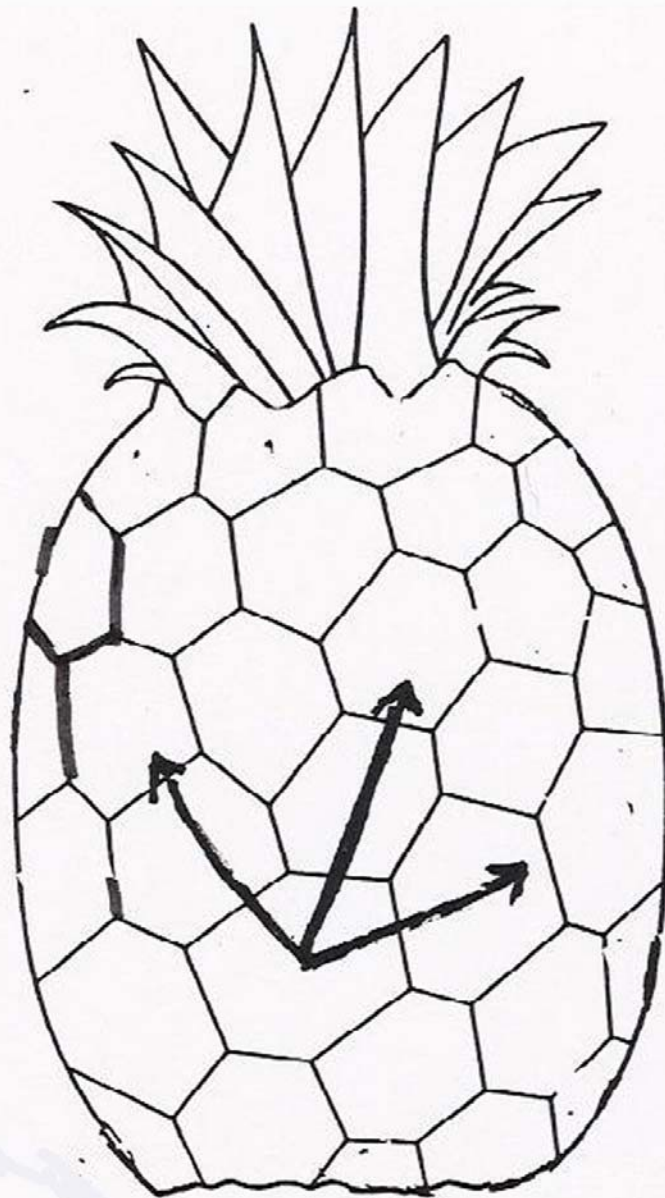


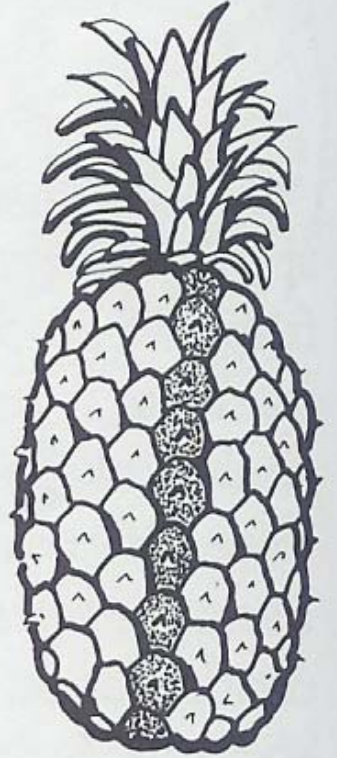
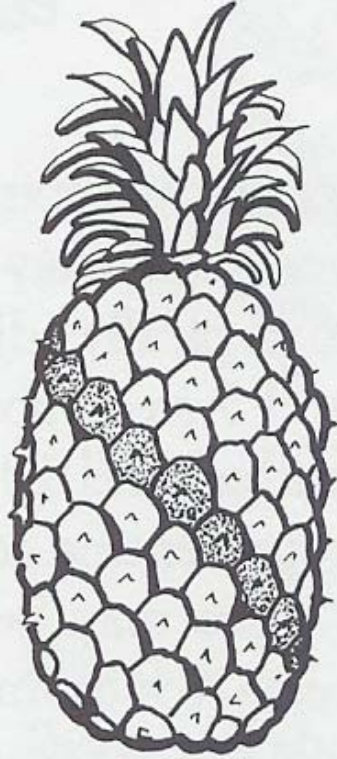
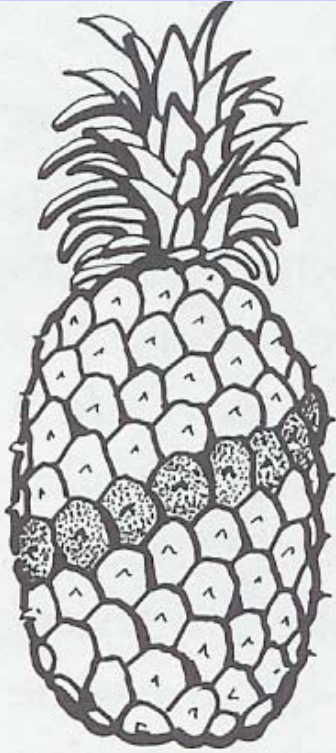
Piñas de pino laricio y abeto





# **Piña tropical:**

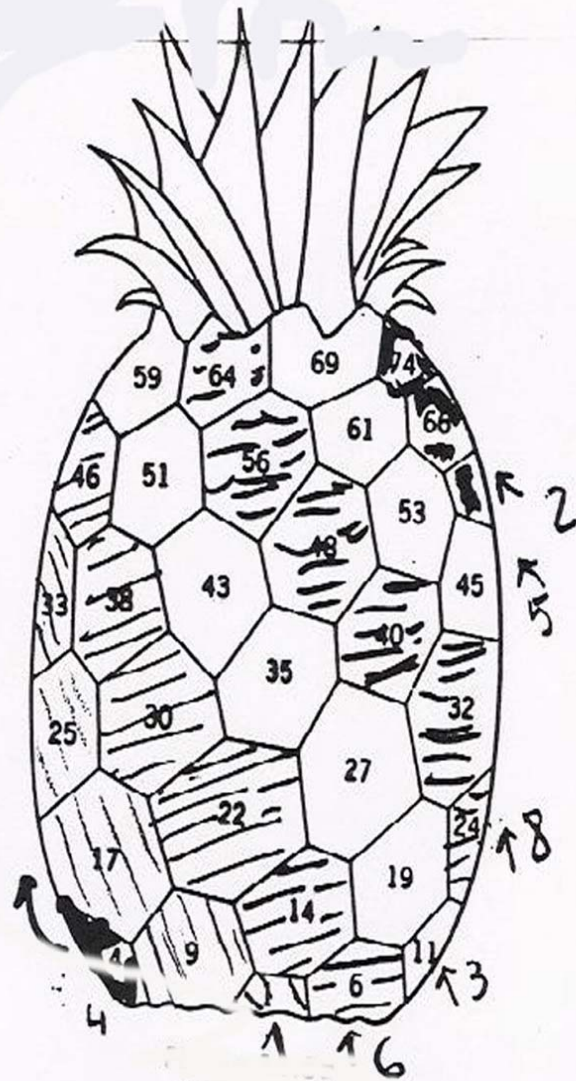




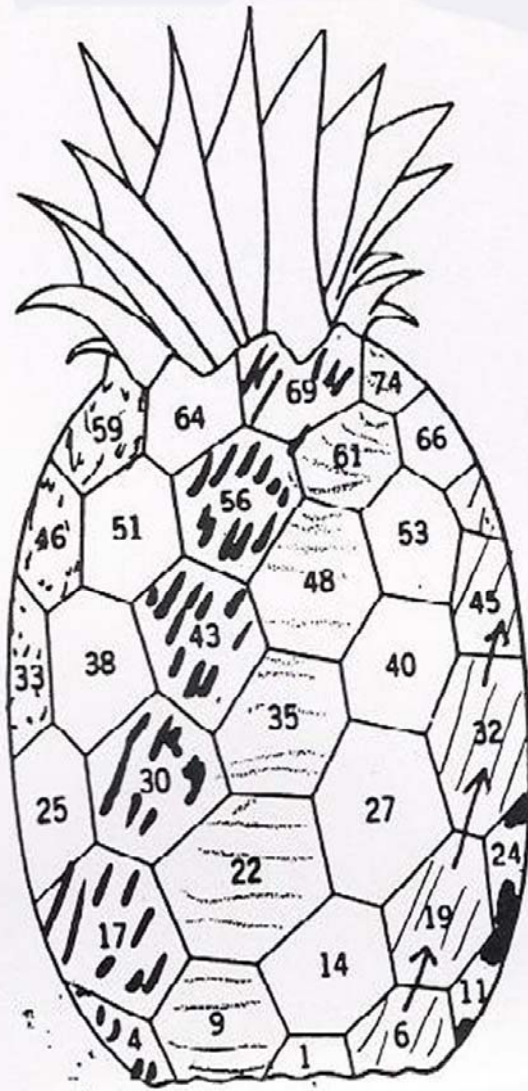
-5



8 bandas

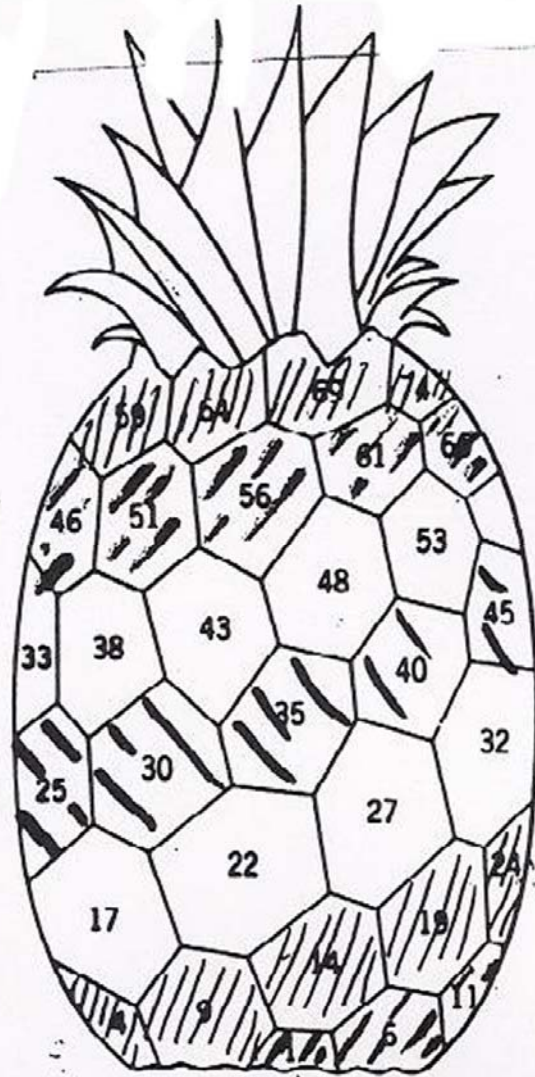


La 7 en el  
revés.



13 bandas

5. bandas



# El girasol





**34 (reloj) y 21(contra) en la de la derecha. Otras 55 y 34, o 89 y 55,...**

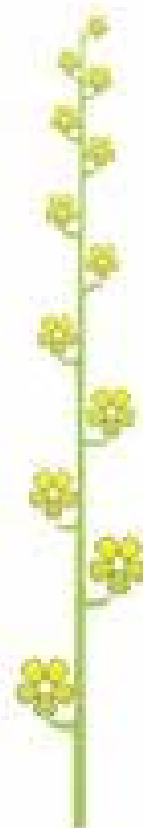
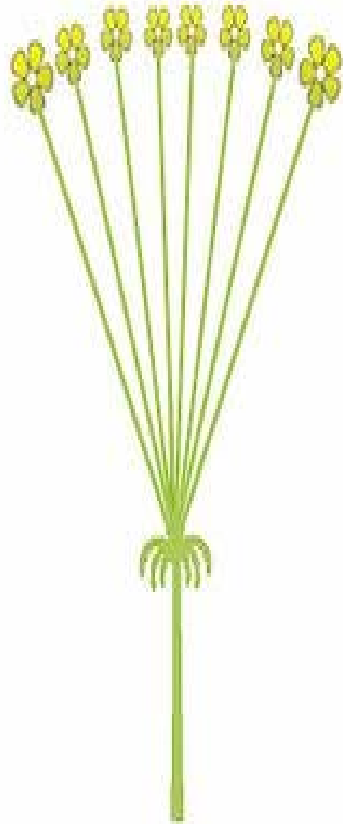
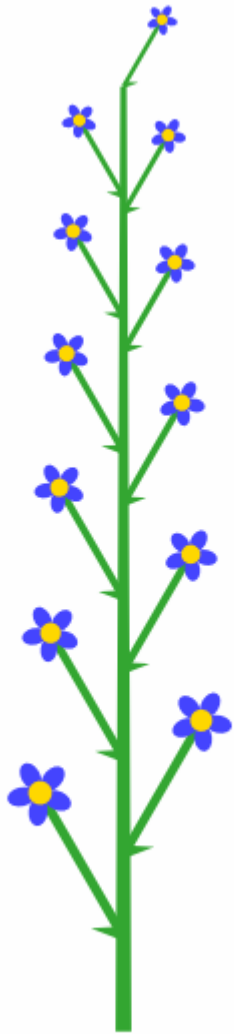


# **Un inciso: inflorescencias**

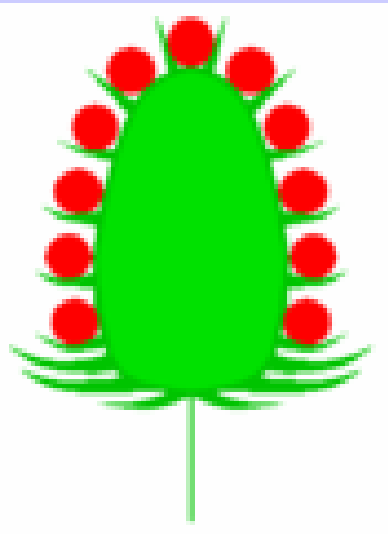
**Flor:** estructura reproductiva de las plantas fanerógamas. Su función, producir semillas por reproducción sexual. (fecundación, fruto, semillas). Flor típica: cáliz, corola, androceo y gineceo. Muchas variantes.

**Inflorescencia:** disposición de las flores sobre las ramas o tallo. Uniflorales o pluriflorales. Muchas clases. Racimosas y cimosas. En las racimosas:

# Racimo, umbela, espiga y capítulo.



Flores  
sésiles (sin  
pedúnculo)



Espiga  
oblonga:  
ananas



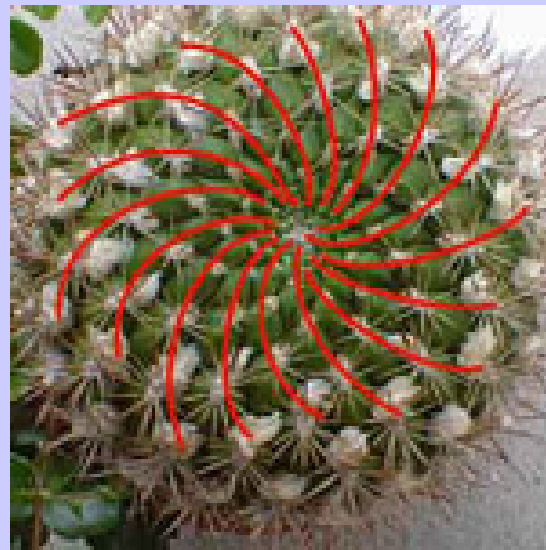
Girasol, margarita:  
el capítulo simula  
una sola flor



# **Otros ejemplos de espirales en vegetales:**

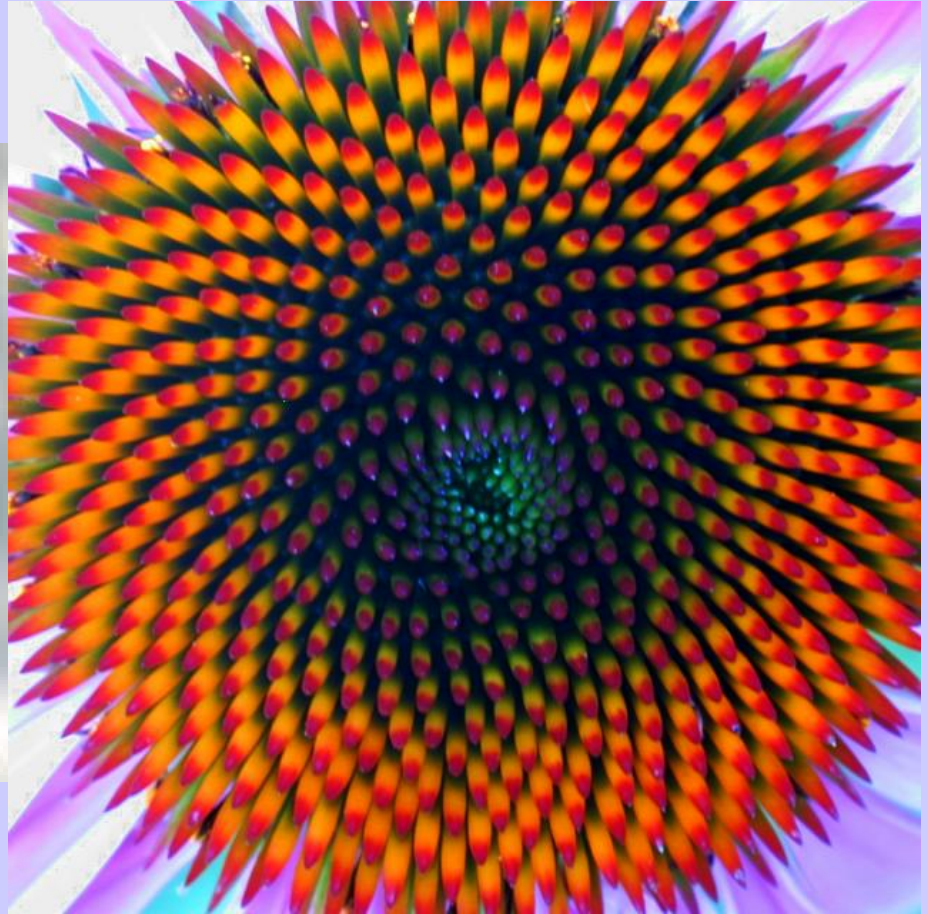


Margarita con 34  
(agujas rel.) y  
21(contrario)



*gymnocalycium*  
 $(10,16)=2(5,8)$

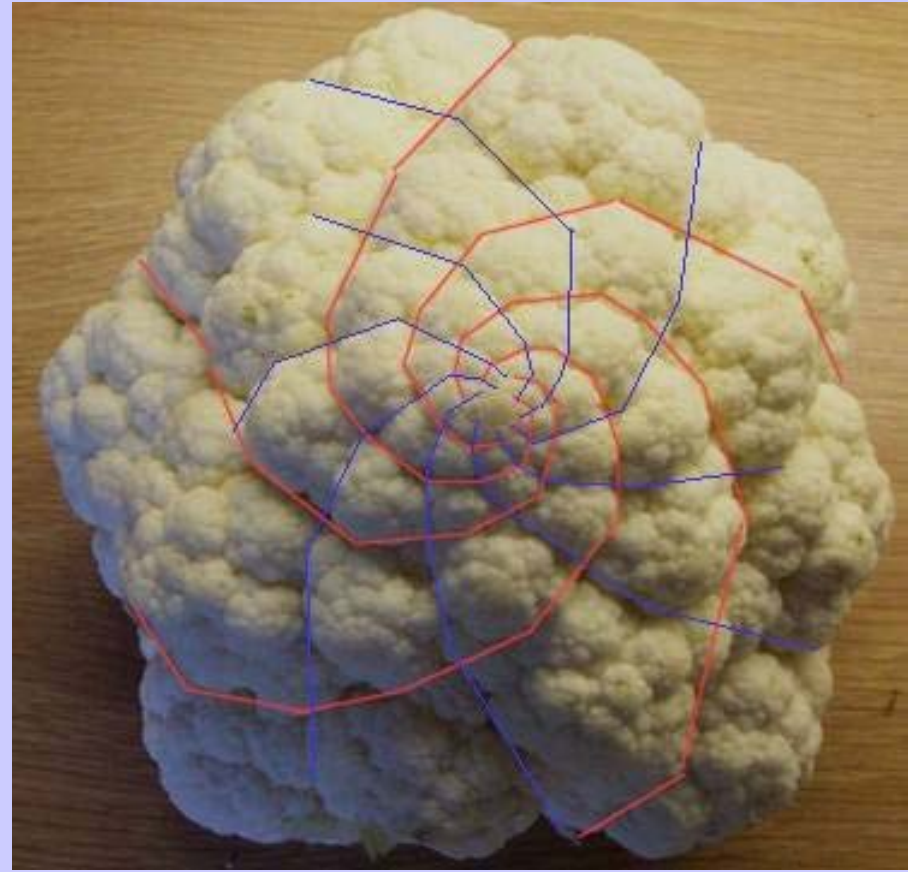
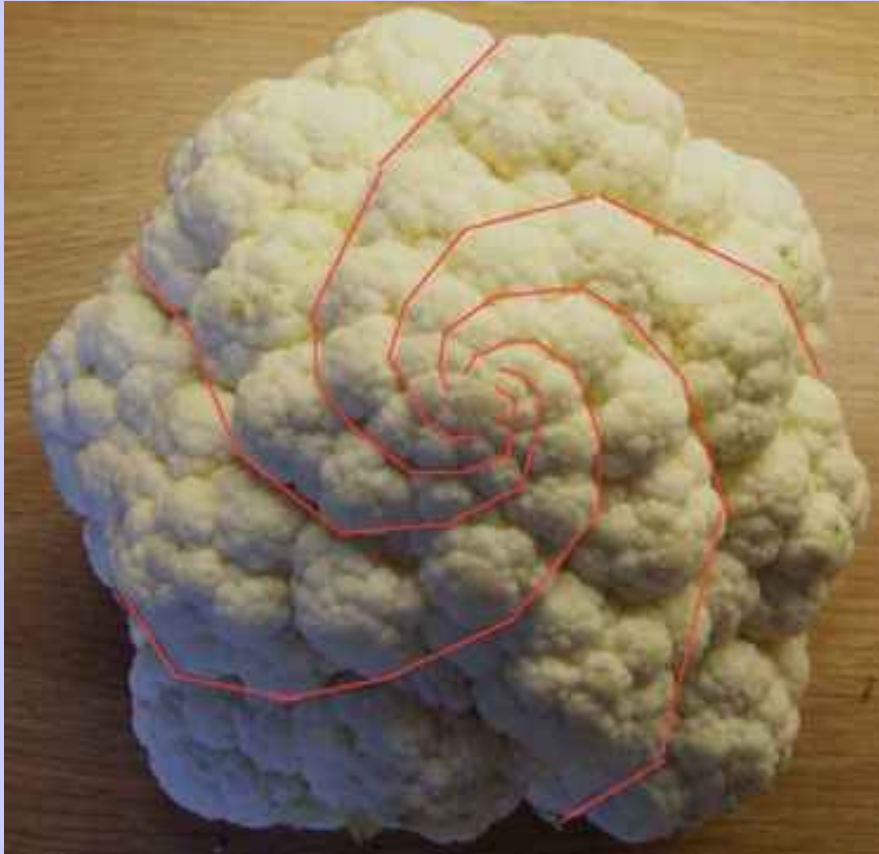




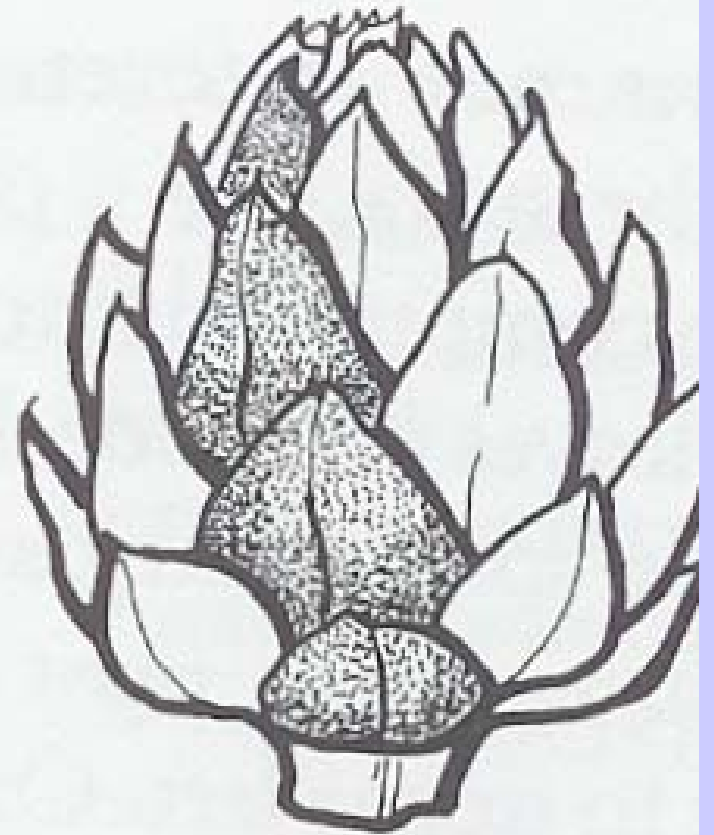
55 agujas reloj y 34 contra







5 espirales rojas y 8 azules



5 y 8



Suele  
haber

3 y 5 o

5 y 8





© MORIN & MOYA





Cica: 8 en un sentido, 13 en otro













spatiphilia





*Carlina acaulis*

*Carlina  
acantifolia*











<http://slarraga.blogia.com>



## **Filotaxia o Filotaxis:**

Disposición de los órganos de la planta: hojas sobre el tallo, pétalos de flores, semillas,...

**2 grandes grupos de disposición foliar:  
verticilada y alterna.**

**Alterna: una hoja por nudo.**

**Verticilada: Dos o más hojas por nudo.**

**Los nudos van girando en el eje:**

**Ángulo de divergencia.**





Ejemplos de alternadas con ángulo de  $180^\circ$ :  
**filotaxis dística**



**Filotaxis  
alternada  
helicoidal o  
espiral**



quite regular spac-

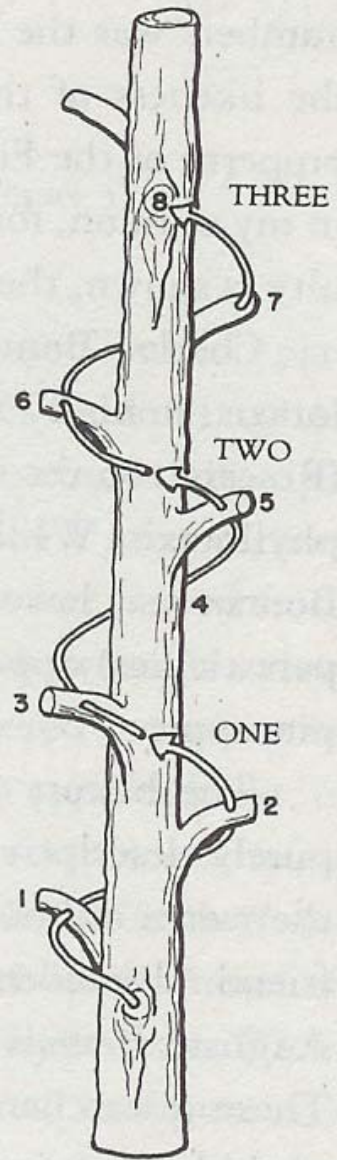


Figure 31

**3/8: en tres  
giros  
completos 8  
brotes**



**Contando m brotes en el tallo hasta que dando n vueltas se repite exactamente la misma posición se suelen repetir ciertos números que veremos luego. Ejemplos :**

**Avellano, zarzamora,..  $1/3$**

**Albaricoque, manzano,...  $2/5$**

**Peral  $3/8$ , ....**

**A veces otras fracciones,  $1/2$ ,  $1/4$ ,...**

**Ejemplo :Ángulo divergencia de  $3/8 = 3/8$  de  $360^\circ = 135^\circ$  Es una aproximación**

3/8





Hojas en espiral (girasol)



**Las hojas se disponen sobre líneas longitudinales que se llaman espirósticos, porque a diferencia de los ortósticos, no son exactamente verticales. Mirando desde el ápice, cuando las hojas son numerosas y los entrenudos son muy cortos, como ocurre en las Crasuláceas o en las piñas de las Coníferas, se observan alineaciones secundarias denominadas parásticos, que marcan las líneas de contacto de cada hoja con las anteriores o sucesivas.**

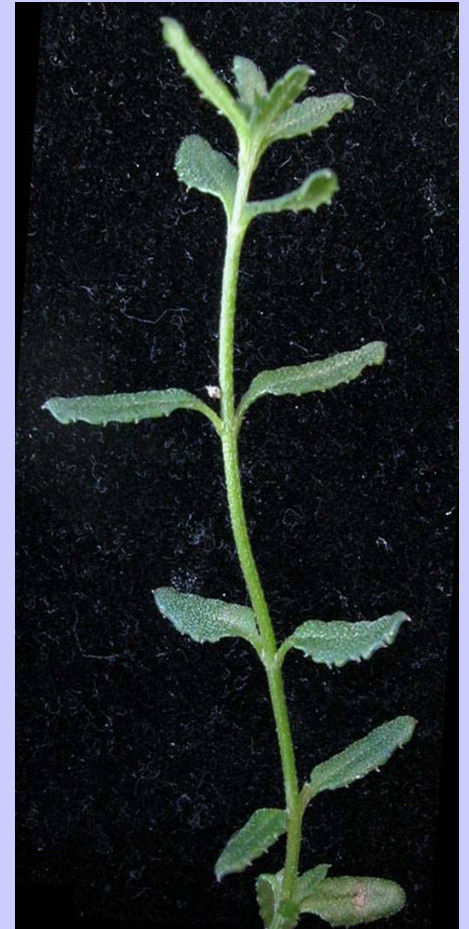


# Crasuláceas



**Filotaxis verticilar. Los verticilos (dímeros, trímeros,...) suelen girar para que las hojas alternen**

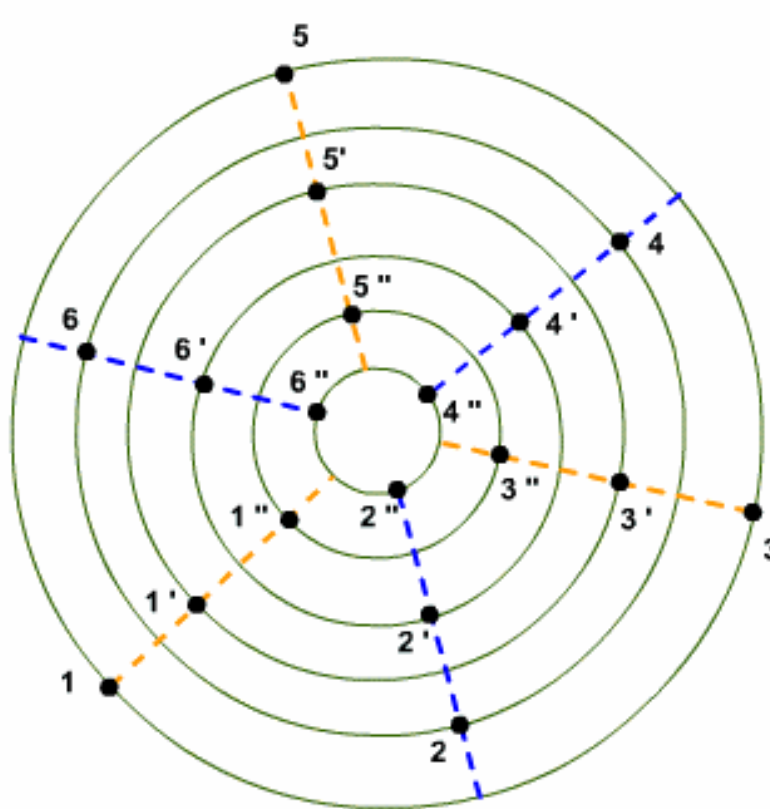
**Filotaxis  
decusada:  
Verticilos de  
2 girando 90°**



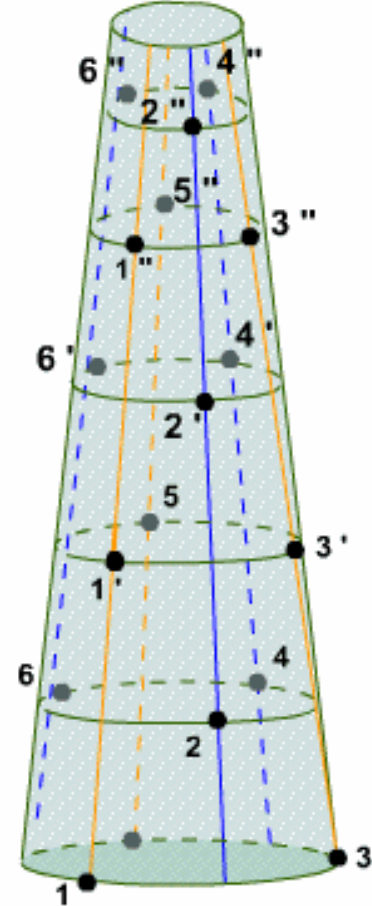




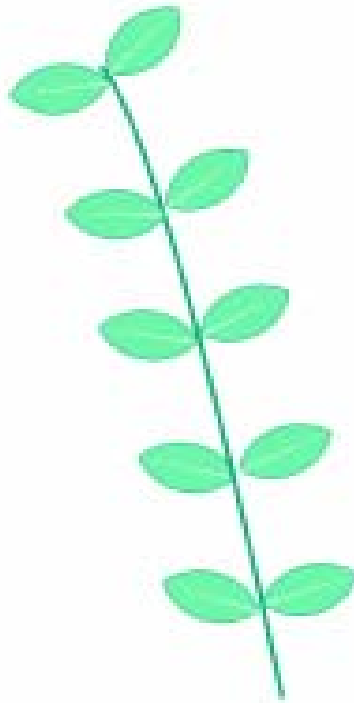
Sándalo o menta (decusada)



Angulo de divergencia =  $60^\circ$   
Número de ortósticos = 6



# Filotaxis tricusada



# **Verticilos dímeros superpuestos**

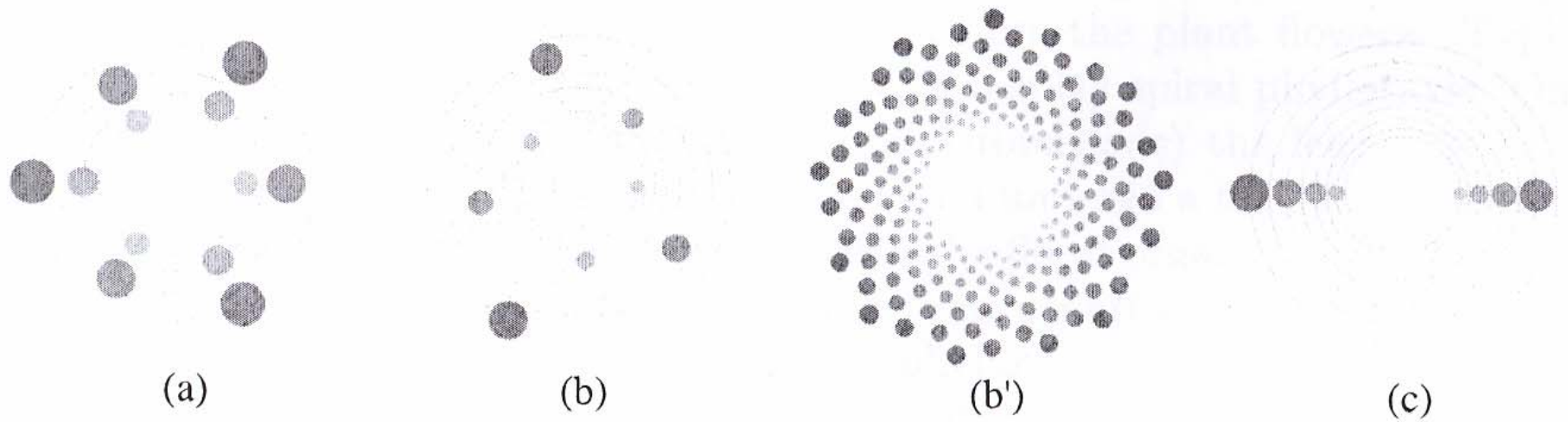
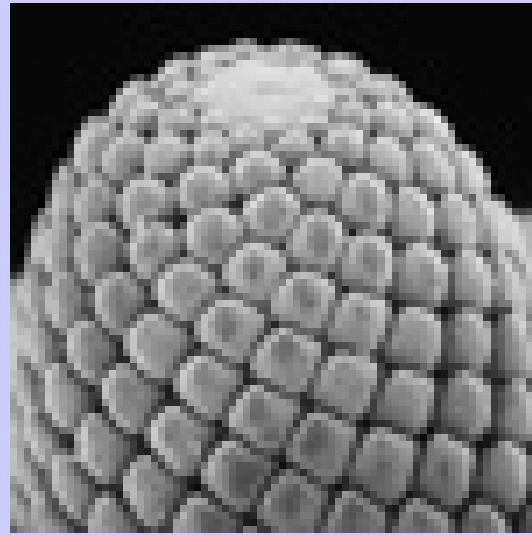
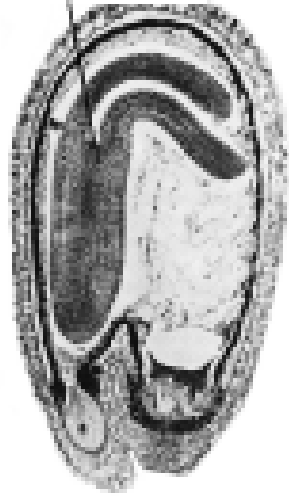


Figure 2: The three main phyllotactic types in a disk (or centric) representation: (a) whorled (here 3 botanical units appear at each node); (b) spiral, with divergence angle  $\simeq 137.5^\circ$ ; (b') spiral again, with same divergence angle but lower growth rate; (c) distichous.

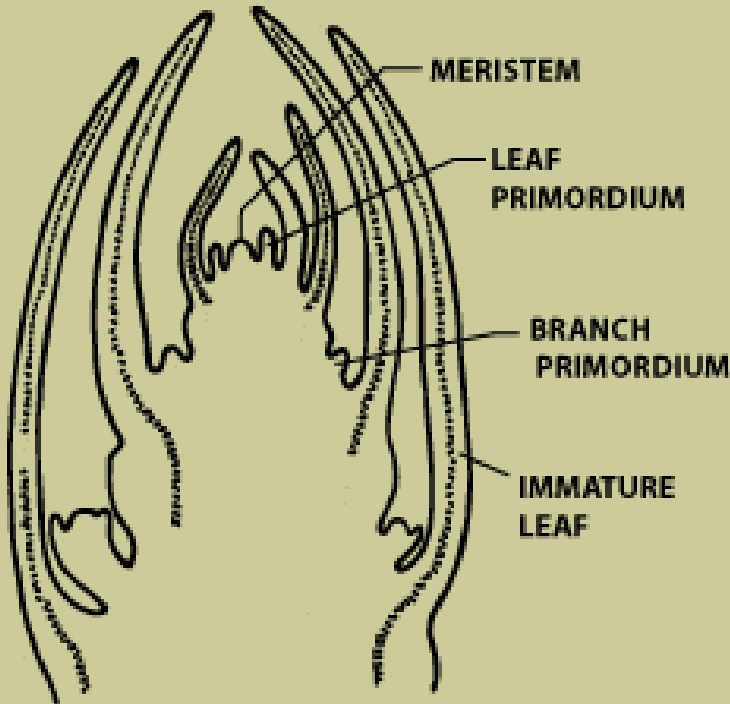


Hojas y otros elementos botánicos son microscópicamente visibles en los primordios (en la foto primordios de abeto noruego, futuras agujas)

**MERISTEM**

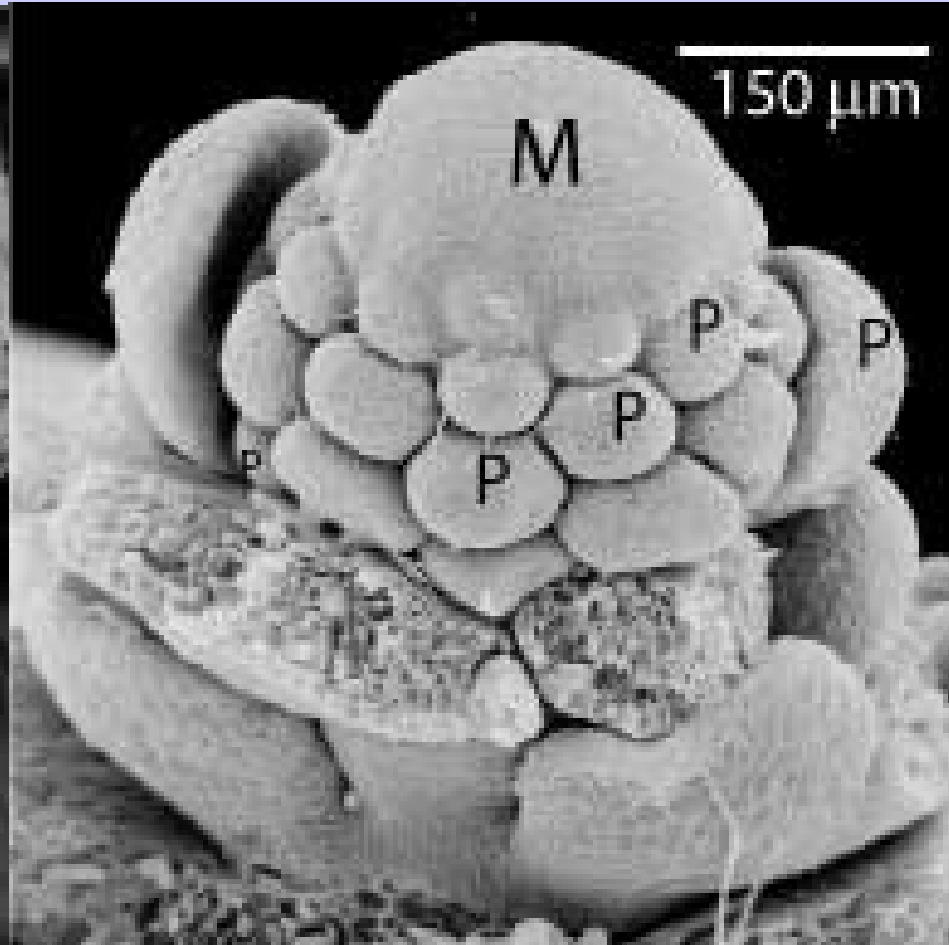
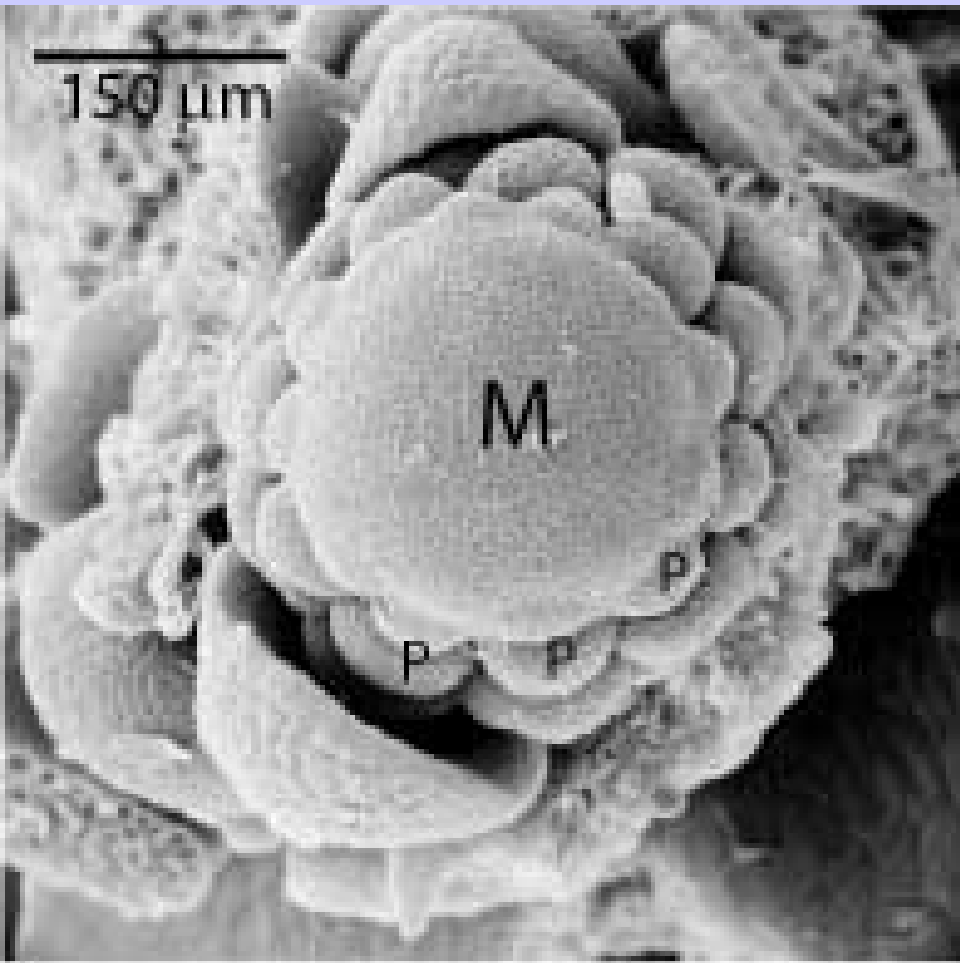


El meristemo está ya en el embrión de la semilla y tiene células que se dividen rápidamente.



El meristemo es desplazado hacia arriba por las nuevas hojas. Meristemos adicionales dan las ramas





Vista microscópica de un meristemo M y los primordios P en un *Ranunculus apiifolius* (apio del diablo)



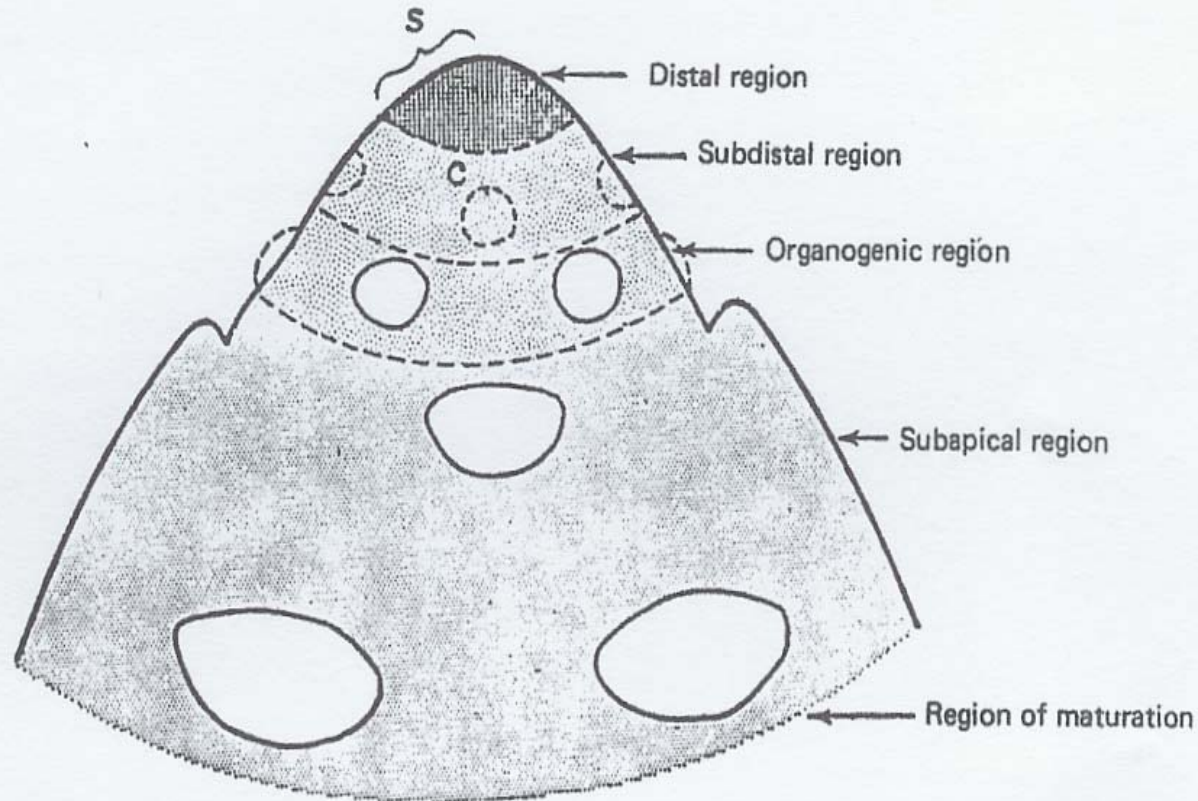
*III. Origins of phyllotactic patterns*

Figure 11.9. Plant apical meristem. Primordia are initiated in the subdistal region and are observed in the organogenic region. As the distal region moves up by growth, the primordia increase in size in the subapical region. (After Wardlaw, 1968b.)

# Números de Fibonacci

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.....

¿Qué ocurre con estos números?

Retrocedemos casi 800 años para encontrar a

**Leonardo de Pisa**

o

**Leonardo Fibonacci,**

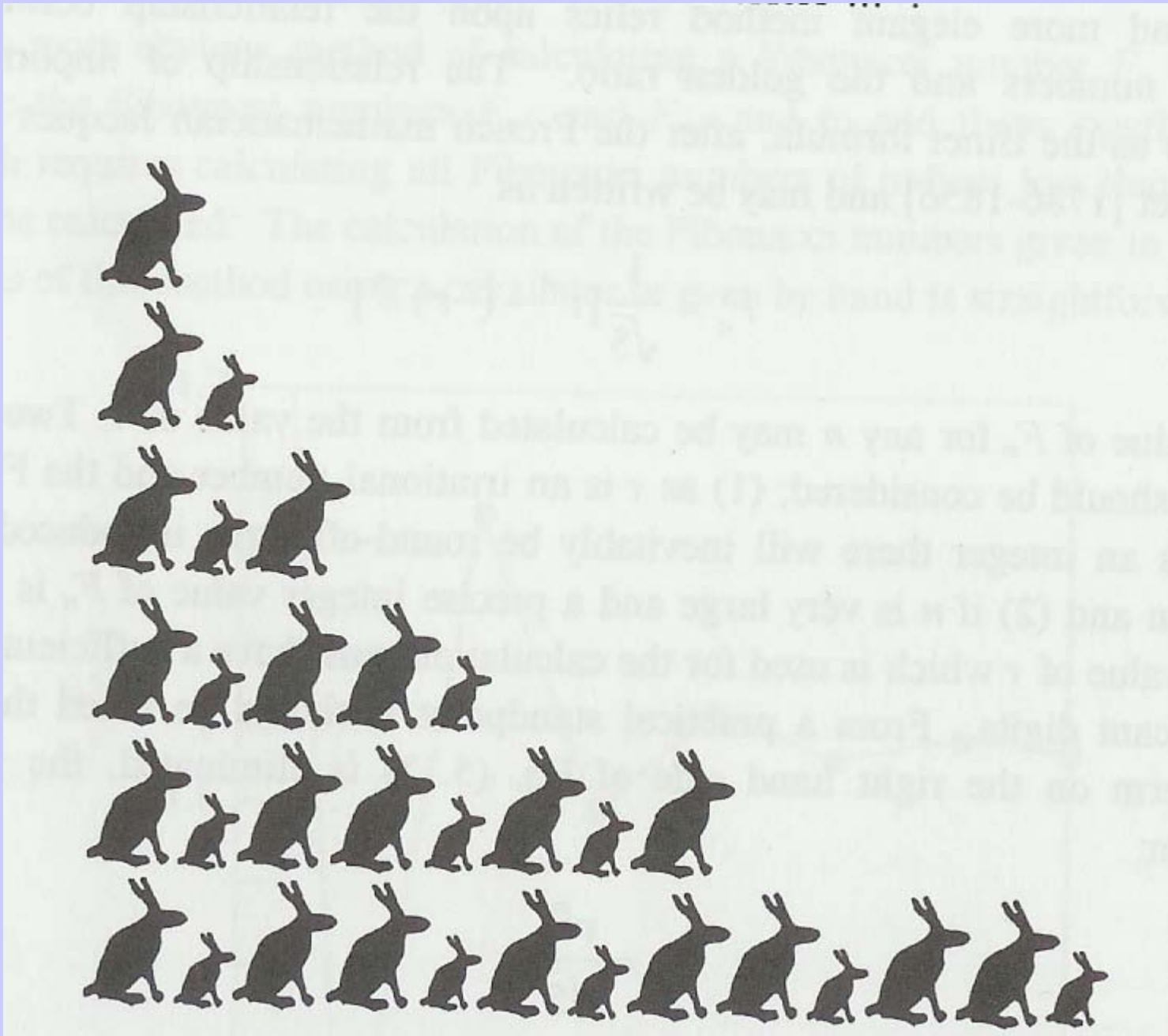


# Liber Abaci

*En un corral se deja una pareja de conejos recién nacidos, macho y hembra. Pasado un mes los conejos son adultos y se aparean. Acabado el segundo mes la coneja pare una nueva pareja, macho y hembra, y acto seguido se vuelve a aparear con el macho.*

*El proceso se va reiterando y cada pareja se apareia por primera vez al mes de nacer, y luego lo hace cada mes, originando, cada mes, una nueva pareja descendiente. Se trata de saber el número de parejas que hay al final de cualquier número  $k$  de meses.*

Al inicio del primer mes hay 1 pareja, al principio del segundo mes sigue habiendo 1, pero al inicio del tercero hay 2. Al inicio del cuarto mes hay 3, porque la pareja antigua ha procreado pero la nueva del mes anterior no. Al inicio del quinto mes ya hay 5, al siguiente 8, luego 13, etc.



La sucesión de números que se obtiene es

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.....**

***sucesión de Fibonacci***, en la que cada número es la suma de los dos anteriores.



# No ley universal, pero sí tendencia de la Naturaleza en vegetales.

La filotaxia más frecuente en la naturaleza es la espiral

1968: de 4290 conos de diferentes especies de pinos en California sólo en 74 (menos del 2%) no salían números de Fibonacci.

**Jean, compilación de estudios  
últimos 150 años en 1994: de  
12750 observaciones de 650  
especies con filotaxia espiral o  
multijugada, espirales con  
Fibonacci salen en el 92% de los  
casos. Un 6% más eran bijugadas  
 $2(i,j)$  de Fibonacci. Un 1.5% más  
eran espirales con la sucesión de  
Lucas: 1,3,4,7,11,18,.....**

## Mundo animal:

-

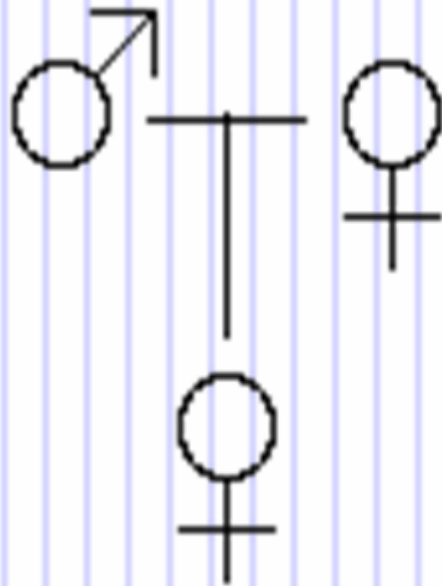
**Los conejos no se reproducen, evidentemente, en esa forma. Era un ejercicio.**

**Sin embargo hay unos animalitos en los que vuelve a aparecer esta sucesión de Fibonacci.**

Entre las abejas, los huevos no fecundados que pone la reina dan lugar a machos o zánganos, y los fecundados a hembras, entre las cuales las abejas seleccionan a nuevas reinas para formar otro enjambre.



los machos sólo tienen un padre (que es la madre), mientras las hembras tienen 2 padres (padre y madre).

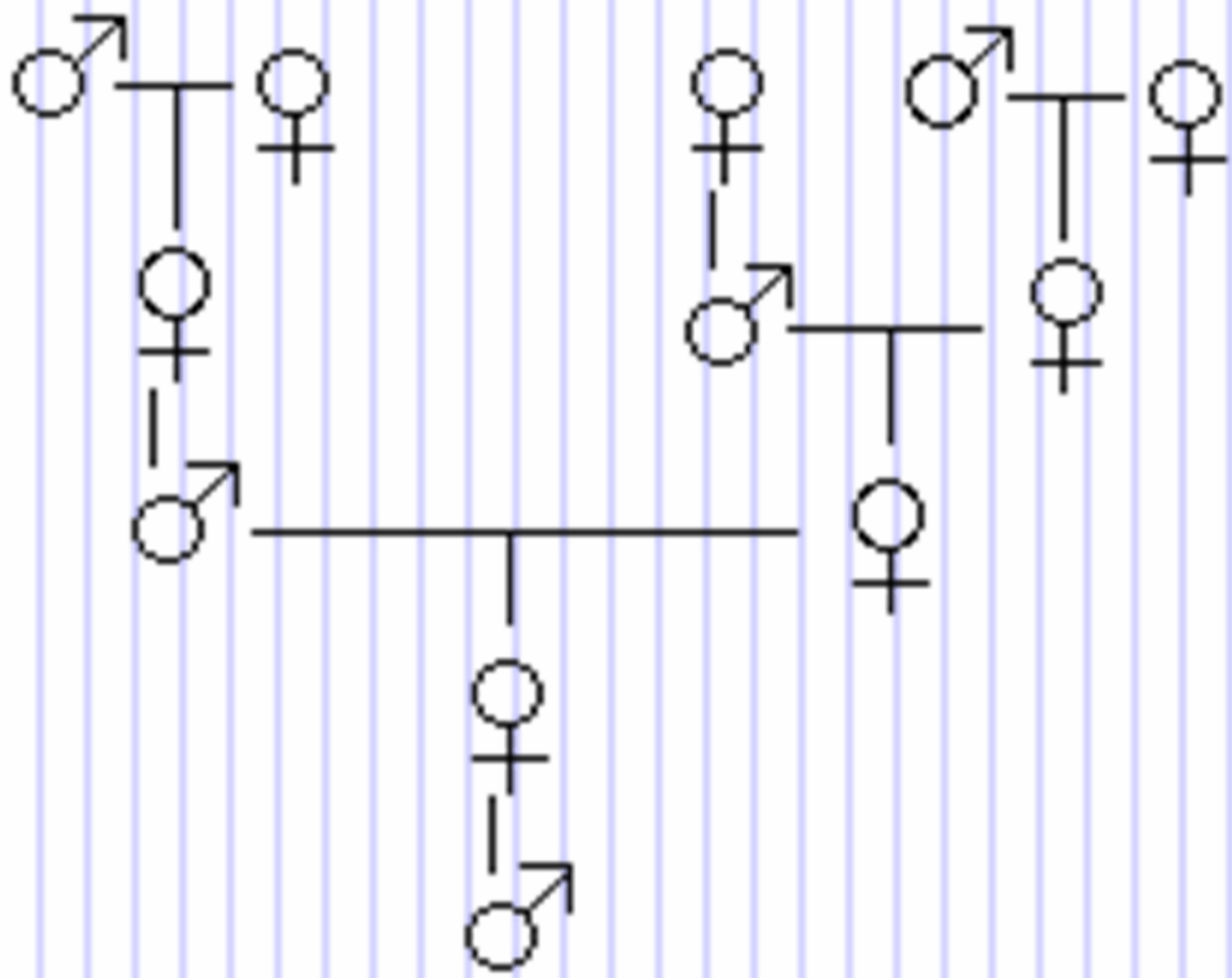


Queens have 2 parents



Males have 1 parent





	<b>Machos:</b>	<b>Hembras:</b>	<b>Total</b>
<b>Actual</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>Gen. Anterior</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>Anterior</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>Anterior</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>Anterior</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>
<b>Anterior</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
<b>Anterior</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>13</b>
<b>Anterior</b>	<b>8</b>	<b>13</b>	<b>21</b>
<b>Anterior</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>34</b>

**ATENCIÓN A LAS  
PROPORCIONES**

**La sucesión de**  
**Fibonacci**  
**y la razón áurea**  
**o número de oro**

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,  
55, 89, 144, 233, 377, ...

Cocientes de términos consecuti-  
vos:

$$\begin{aligned}1/1 &= 1, & 2/1 &= 2, & 3/2 &= 1.5, \\5/3 &= 1.666\dots, & 8/5 &= 1.6, \\13/8 &= 1.625, & 21/13 &= 1.61538, \\34/21 &= 1.61904, \\55/34 &= 1.61764, \\89/55 &= 1.61818, \\144/89 &= 1.61797, \\233/144 &= 1.618055, \dots\end{aligned}$$

El límite es

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398\dots$$

(no evidente)

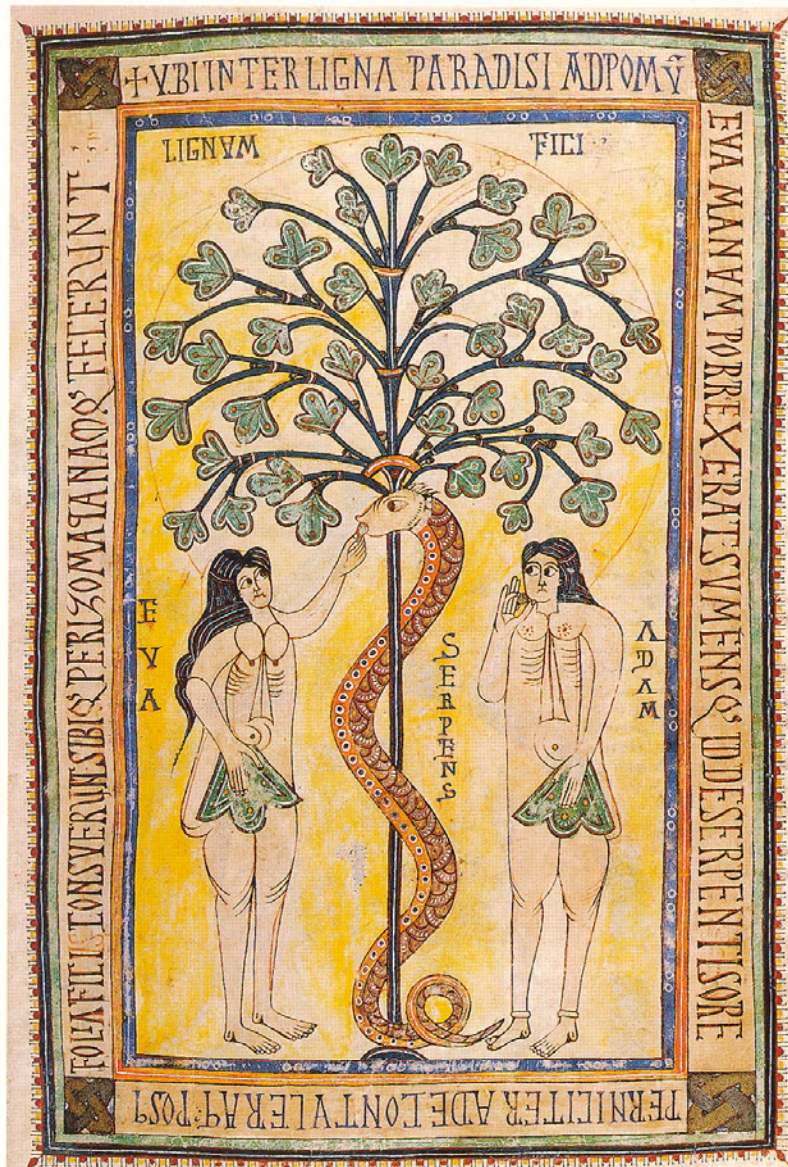


# Un poco de Historia .....



Codice de  
Vigila o  
Vigilan,  
Albelda, 976,  
Escorial.

Ripoll,  
Gerberto de  
Aurillac,  
Silvestre II.  
Siglo V-VI  
hindues,  
siglos VII-IX  
Al Kwarizmi



9 8 7 6 5 4 3 2 1 III  
Iaē d. cronice yocabylo III



Códice de Vigila, 976 (n° 20). En el sentido de las agujas del reloj:  
Adán y Eva, bestiario, capitular iluminada y números





# Estatua de Fibonacci en el cementerio antiguo de Pisa

Liber Abaci 1202

Abacistas y algoristas: tablas y libros. El cálculo.

No los griegos

1454 Gutenberg

1494 Luca Pacioli



**Esto relaciona a la sucesión de Fibonacci con la razón áurea o número de oro y su mundo de propiedades y mitos.**

**Volvemos a la Filotaxia con un poco de Historia**

**Teofrasto (300 a.C), alguna observación sobre plantas con patrones regulares.**

**Plinio el Viejo (siglo I) Historia Natural observaciones similares.**

**Leonardo da Vinci (1452-1519) observó ciertos patrones espiralados, en ciclos de a 5 (que corresponde a un ángulo divergencia de  $2/3$  de vuelta)**



**Johannes Kepler (siglo XVII):  
relaciona con números de  
Fibonacci (intuitivo) observando  
la frecuente ocurrencia del  
número 5 en plantas.**

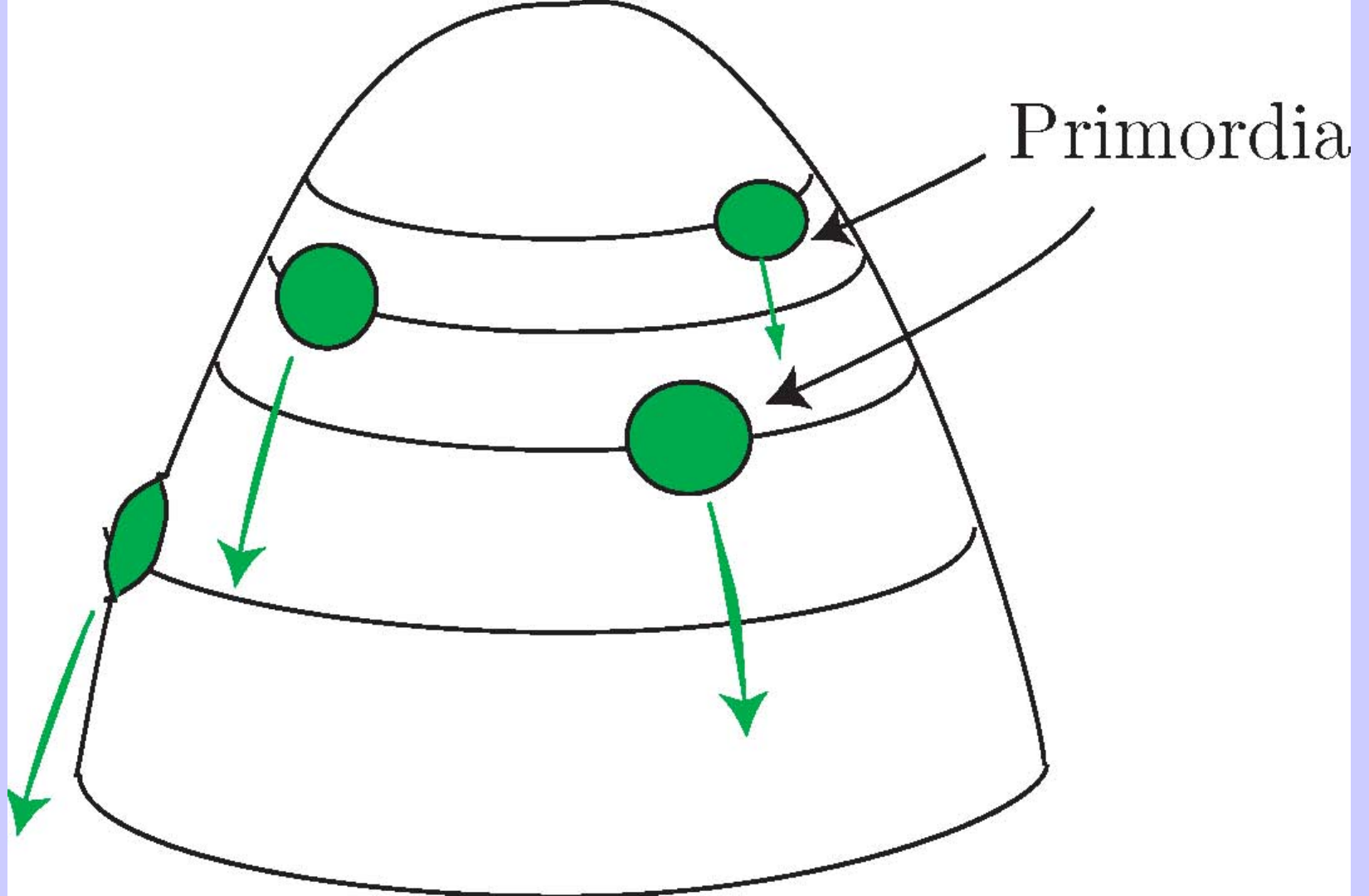
**Charles Bonnet (siglo XVIII)  
en su libro de 1754  
"Investigaciones sobre el uso  
de las hojas de las plantas" da  
una clara descripción de la  
filotaxis con factor  $2/3$ .**

**Pero la Filotaxia comienza rigurosamente en siglo XIX, con Schimper y Brown, botánicos , y sobre todo con los hermanos Bravais, cristalógrafo y botánico , que fueron los primeros en relacionar sistemáticamente con los números de Fibonacci**

**Desde el siglo XIX y XX, muchos estudios, teorías, hasta sistemas dinámicos, simulaciones por ordenador ,...**

**Hofmeister (1868) y Snow (1932) hipótesis:**

- los primordios se forman periódicamente.**
- Una vez formados se alejan radialmente del ápice**
  - Los sucesivos están inhibidos por la proximidad de los anteriores: se colocan lo más lejos posible.**



Cilindric model, planar model similarly

**Refinadas por hipótesis  
adicionales: empaquetamiento en  
el mínimo espacio, fuerzas físicas  
como presión de contacto, señales  
químicas,... las hipótesis de  
Hofmeister se mantienen.  
Imágenes microscópicas.**

•



**Hay teorías bioquímicas de  
reacción-difusión  
(Reinhardt y otros (Nature,  
2003)): una hormona, la  
auxina, juega papel crucial  
en la posición y desarrollo  
de los primordios.**

**Al formarse un primordio absorbe auxina para crecer de la zona cercana. El siguiente sale de la zona más lejana.**

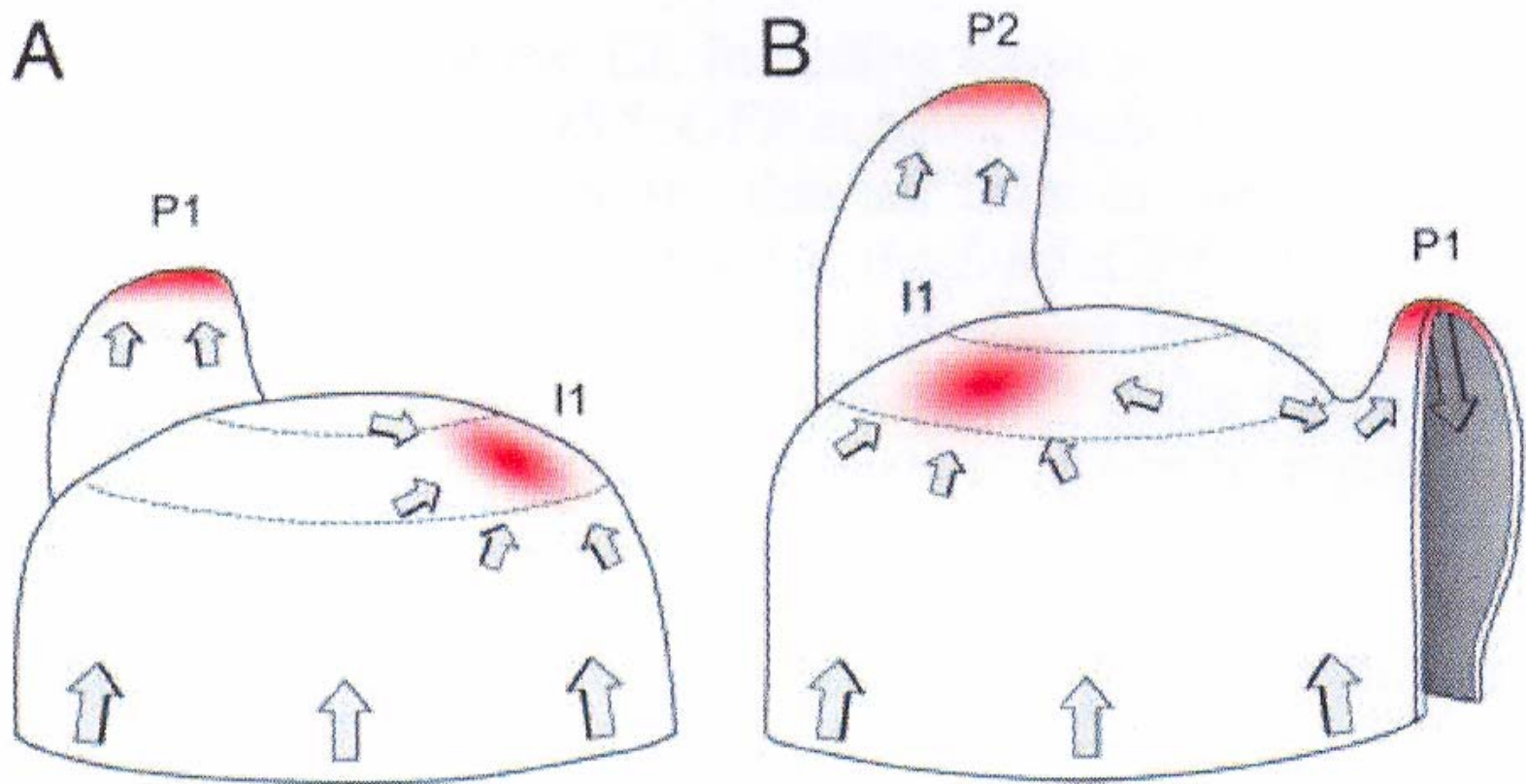
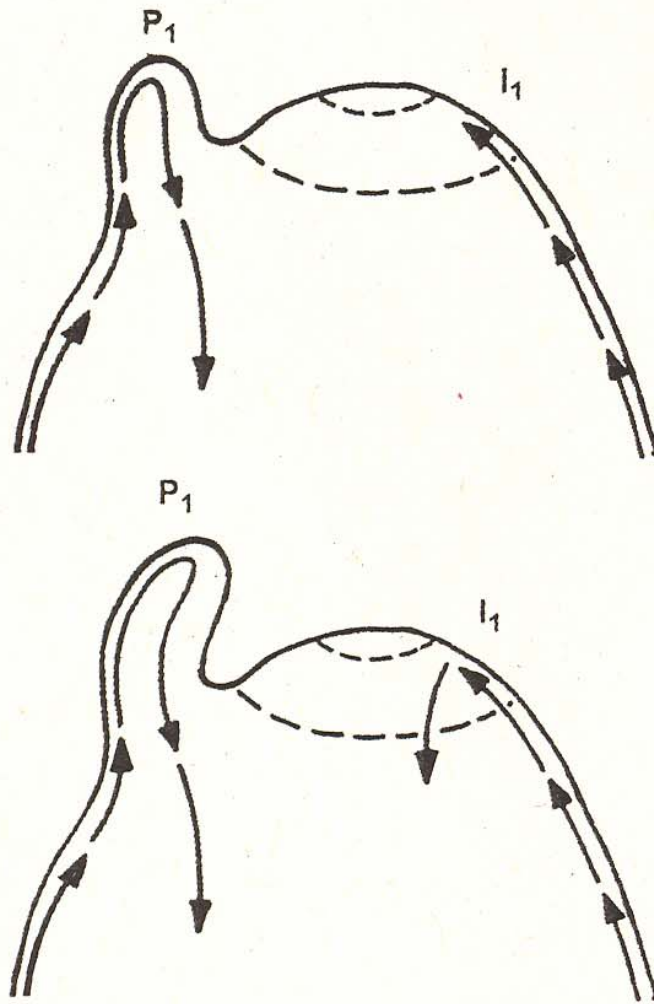
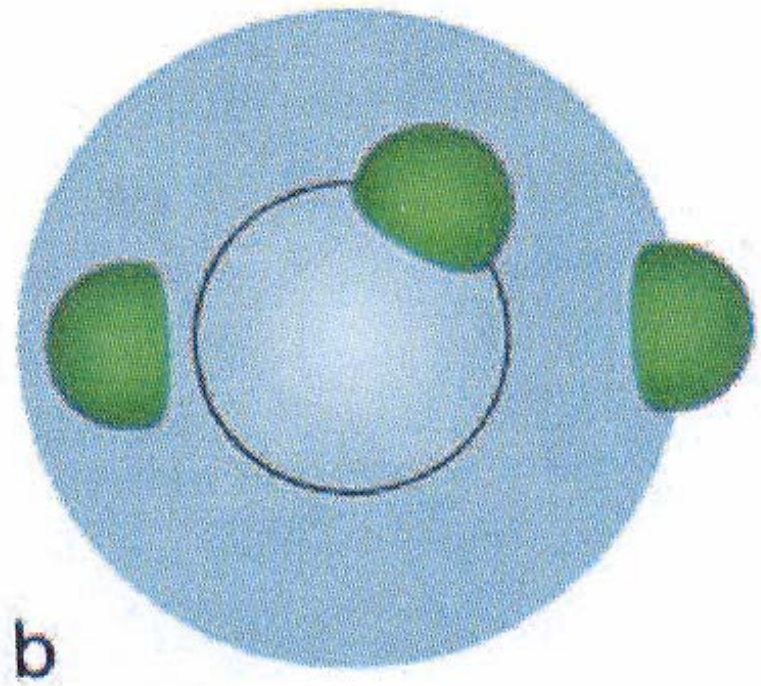
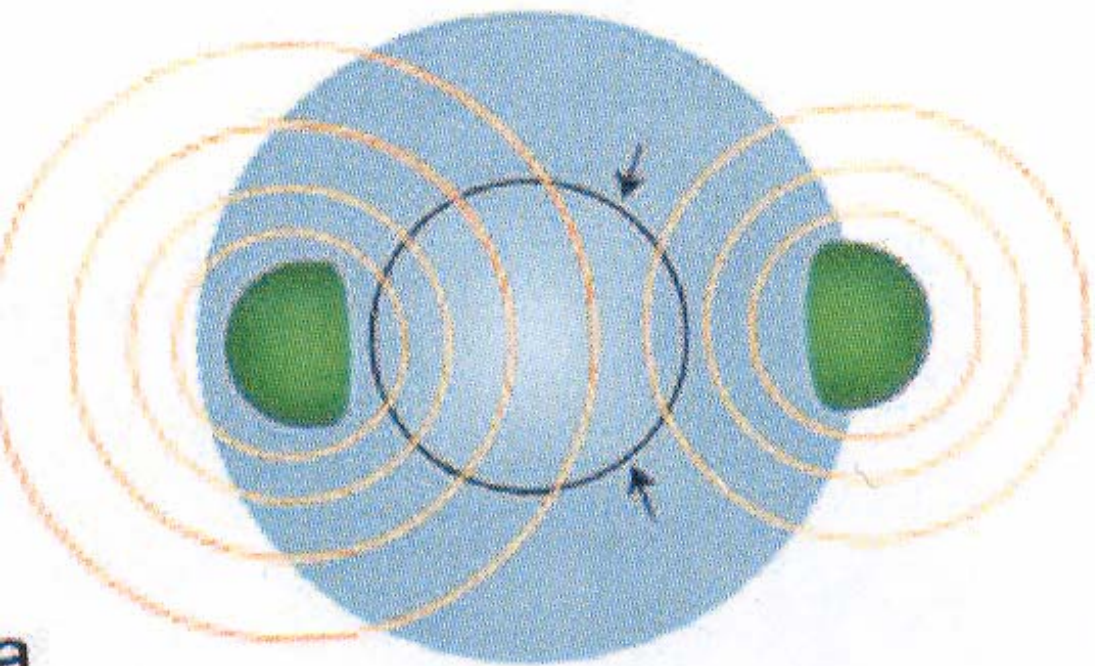


Fig. 4. Conceptual model of the regulation of phyllotaxis by polar auxin

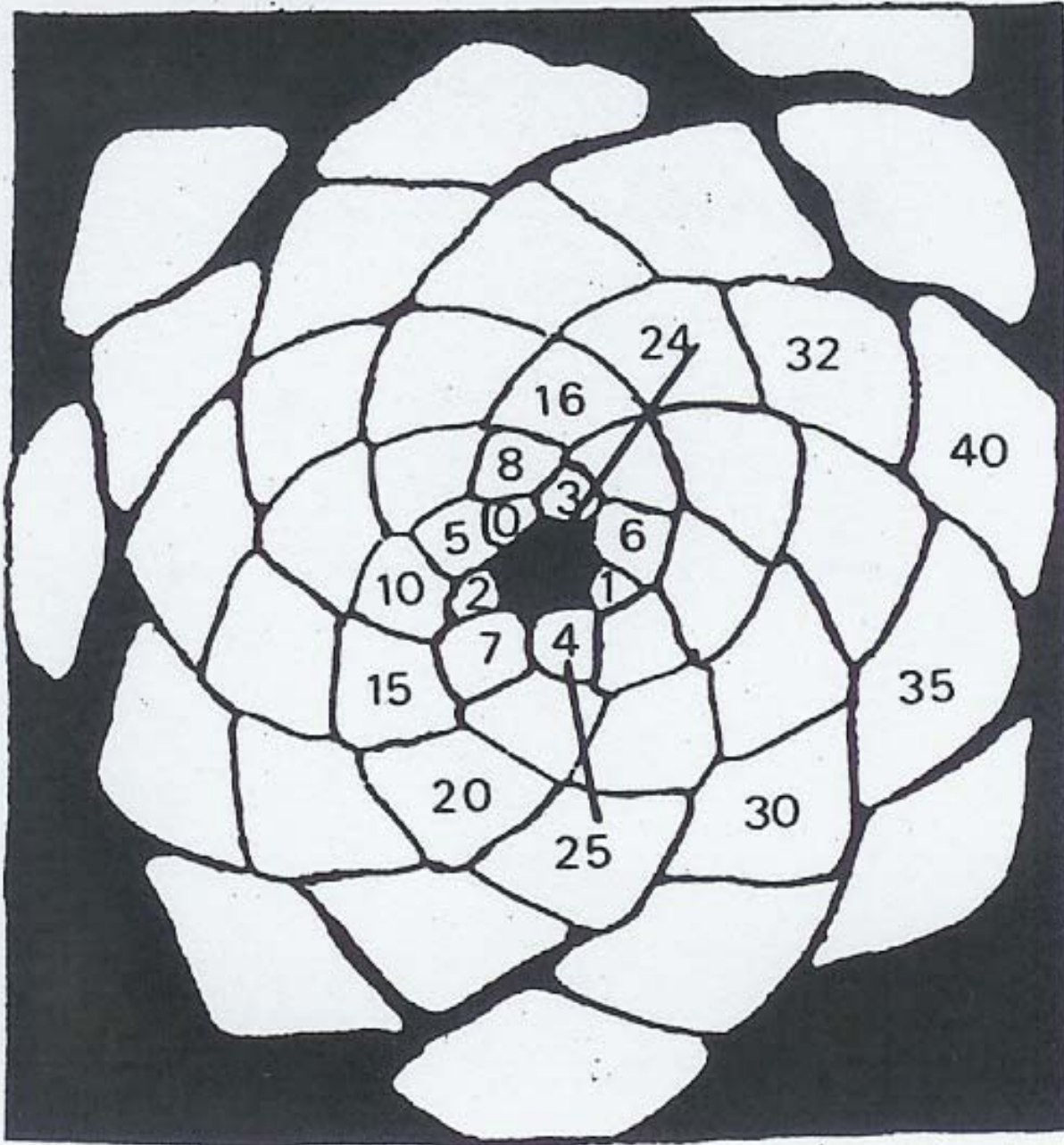


**Figure 5** Model for the role of polar auxin transport in phyllotaxis. Schematic representation of an apex in longitudinal section through  $P_1$  and  $I_1$  at an early (top) and a later stage (bottom) of incipient primordium formation. Polar auxin flux is indicated with arrows. Top, acropetal auxin flux is diverted by  $P_1$  preventing auxin accumulation on the left flank of the meristem, while auxin can reach the right flank ( $I_1$ ). Bottom, accumulation of auxin at  $I_1$  promotes primordium formation, and establishment of a new auxin sink.

the location of

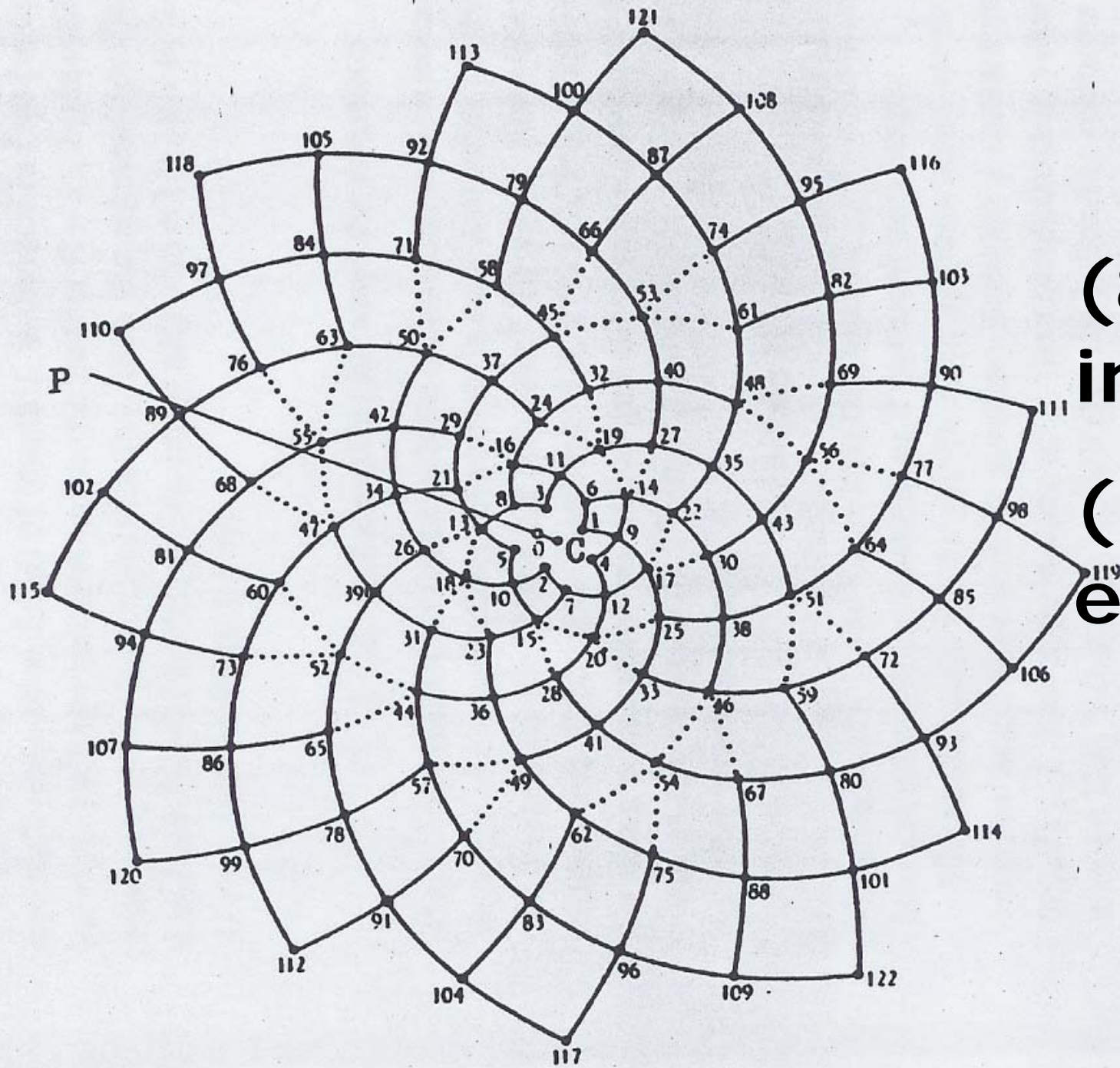




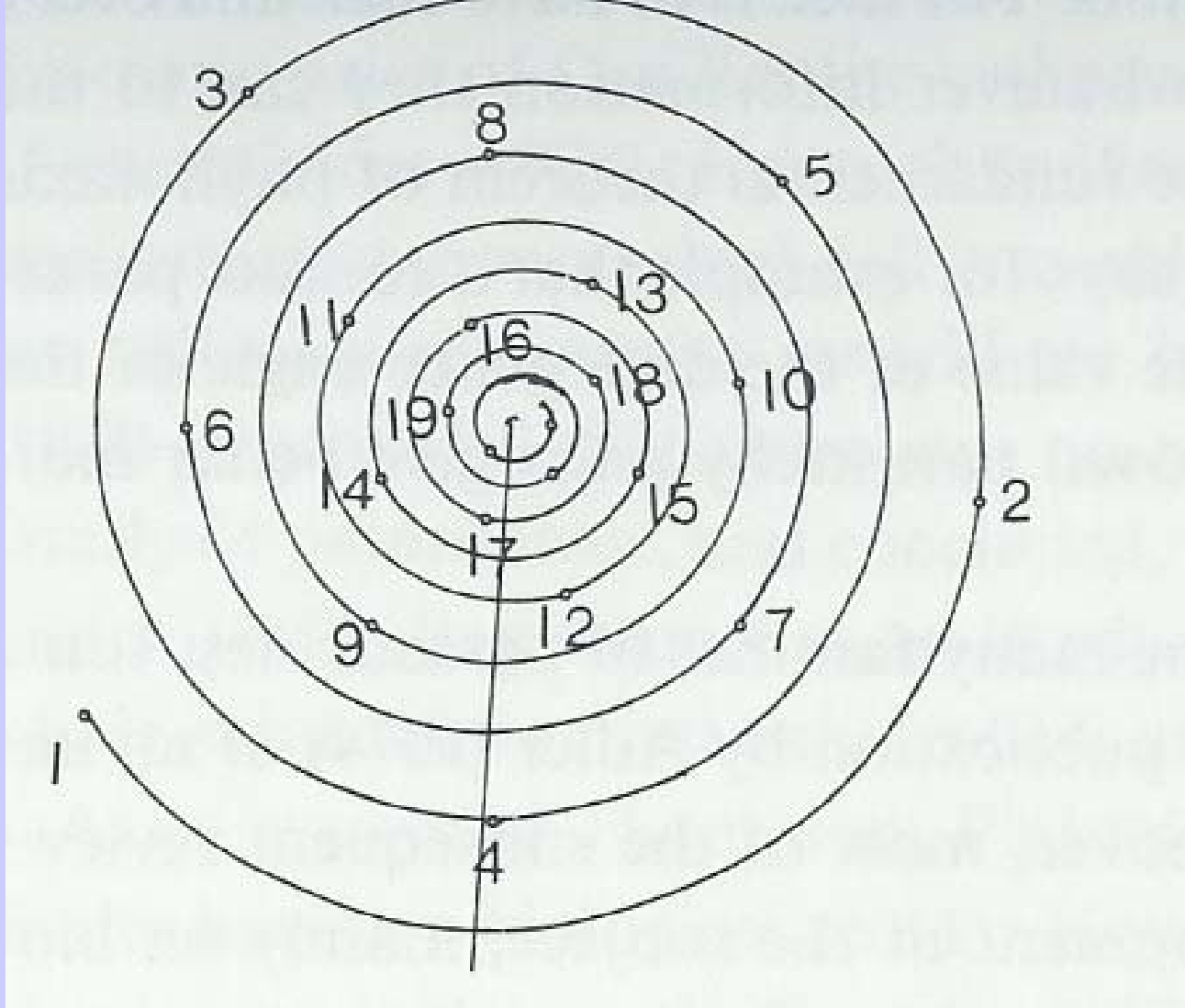


**Par  
parastí-  
quico:  
(5,8)**

- **Los modelos espirales son descritos por su par parastíquico  $(m,n)$ .**
- **Cuando son múltiples, en forma  $k(i, j)$ ,  $k$  número de elementos por verticilo.**
- **Los dícticos pueden ser enumerados  $(1,1)$ .**

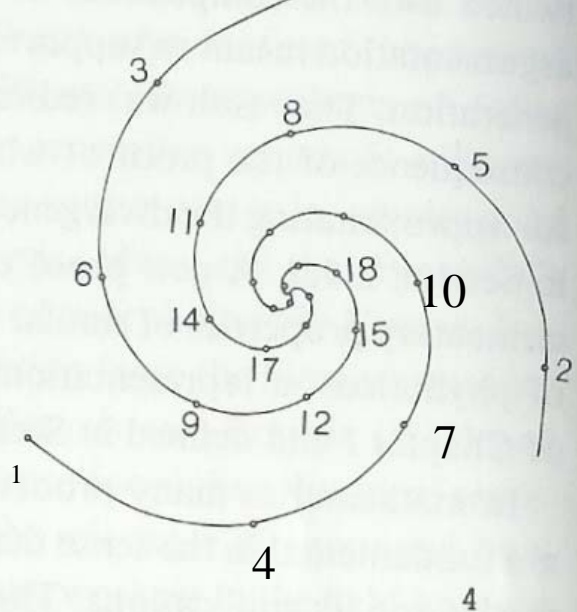


**(8,13)**  
**interior,**  
**(13,21)**  
**exterior**

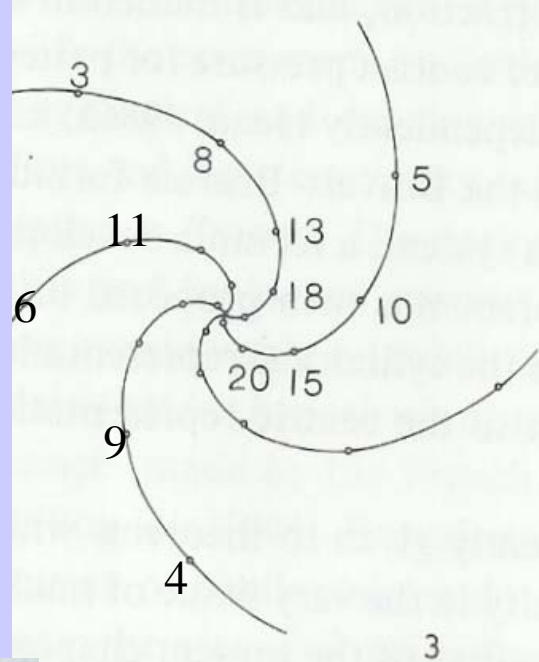


**Espiral genética y ángulo de divergencia: tiende a  $137'507\dots^\circ$  o  $222'492\dots^\circ$  girando a izqda.**

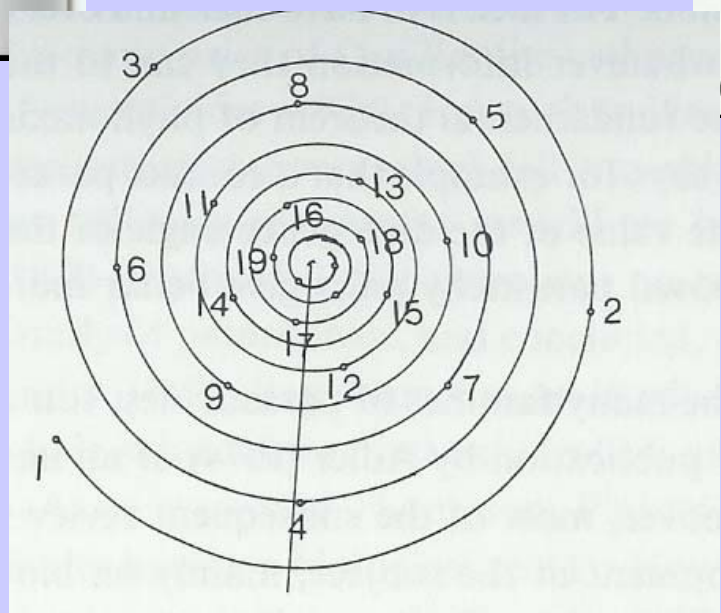




e distributed at  $137\frac{1}{2}^\circ$  with respect to

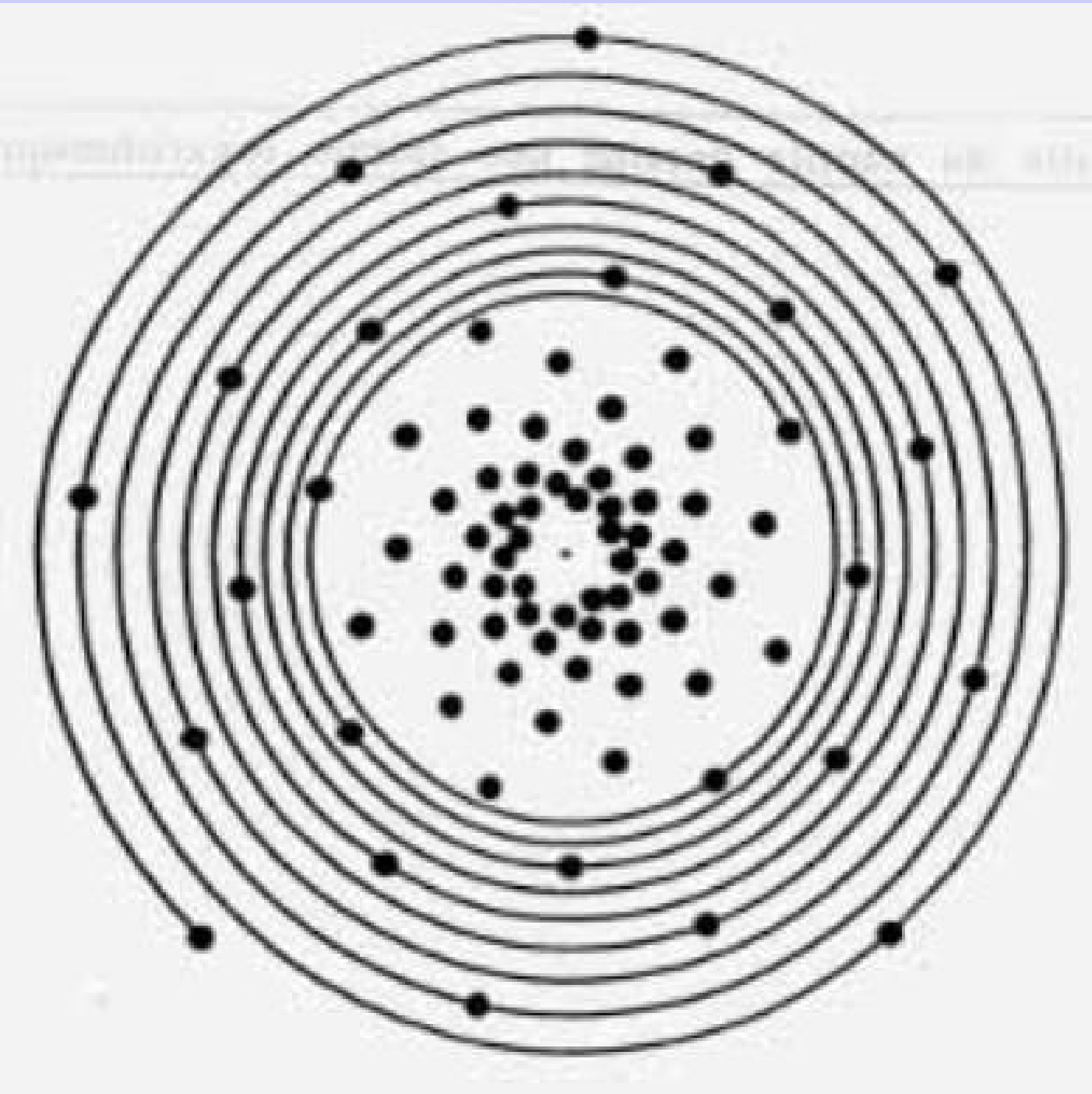


e 2.1. (1) A spiral on which poin



**Arriba, par parastuico (3,5) de la espiral genetica de abajo**





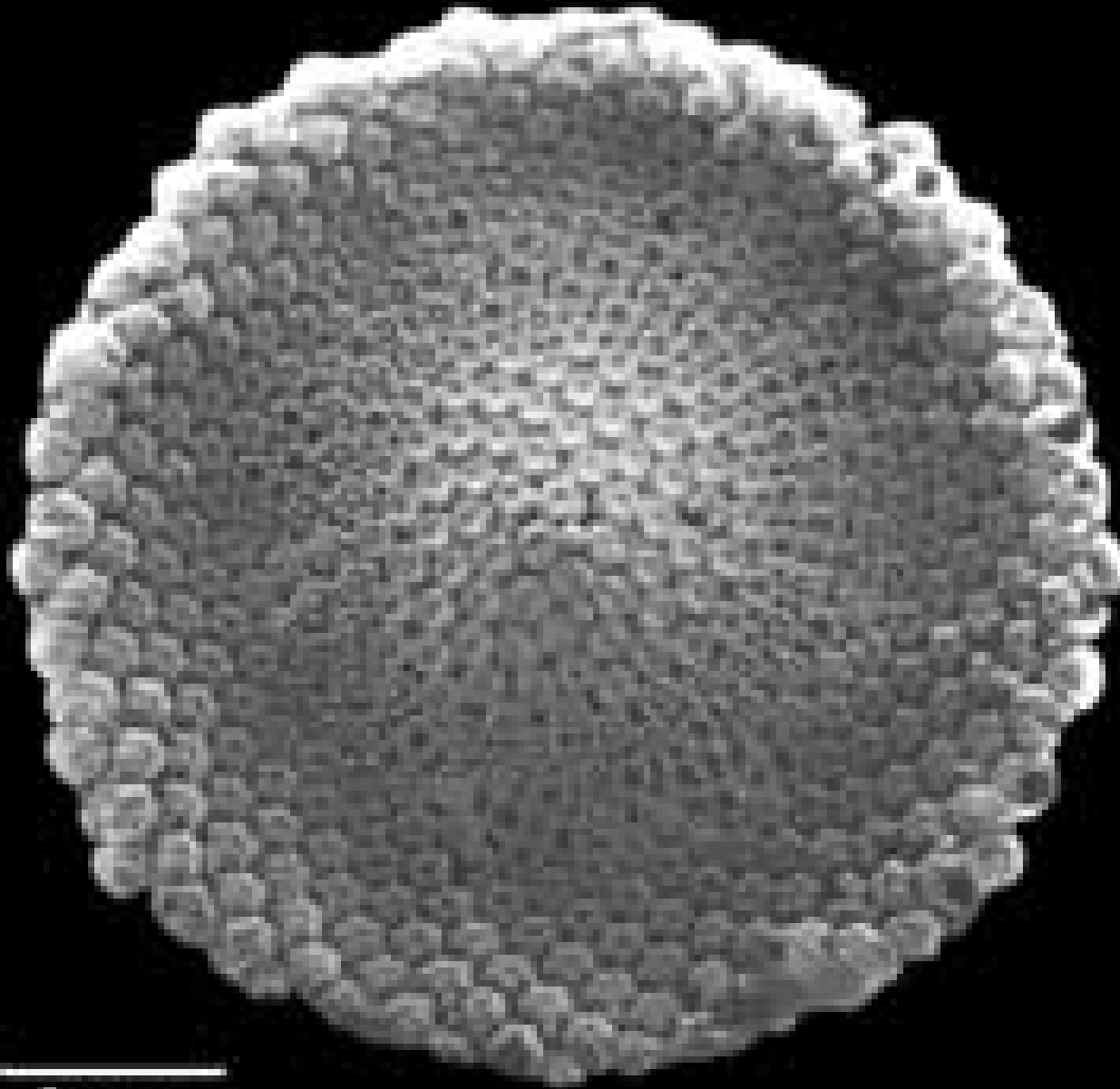


***Aonium*, par (2,3), ángulo  
entre hojas 2 y 3 o entre 5 y  
6 muy próximo a 137.51  
grados (o 222.49)**

# Algunas aproximaciones matemáticas al problema

- **Simulación física experimental**
- **Empaquetamiento de discos (optimización del espacio)**
- **Sistemas dinámicos**
- **Simulación numérica (campos inhibitorios, graficas por ordenador, etc)**

# **El modelo plano**



Meristemo de alcachofa con par (34,55). Los primordios son futuros pelos del corazón de la alcachofa.



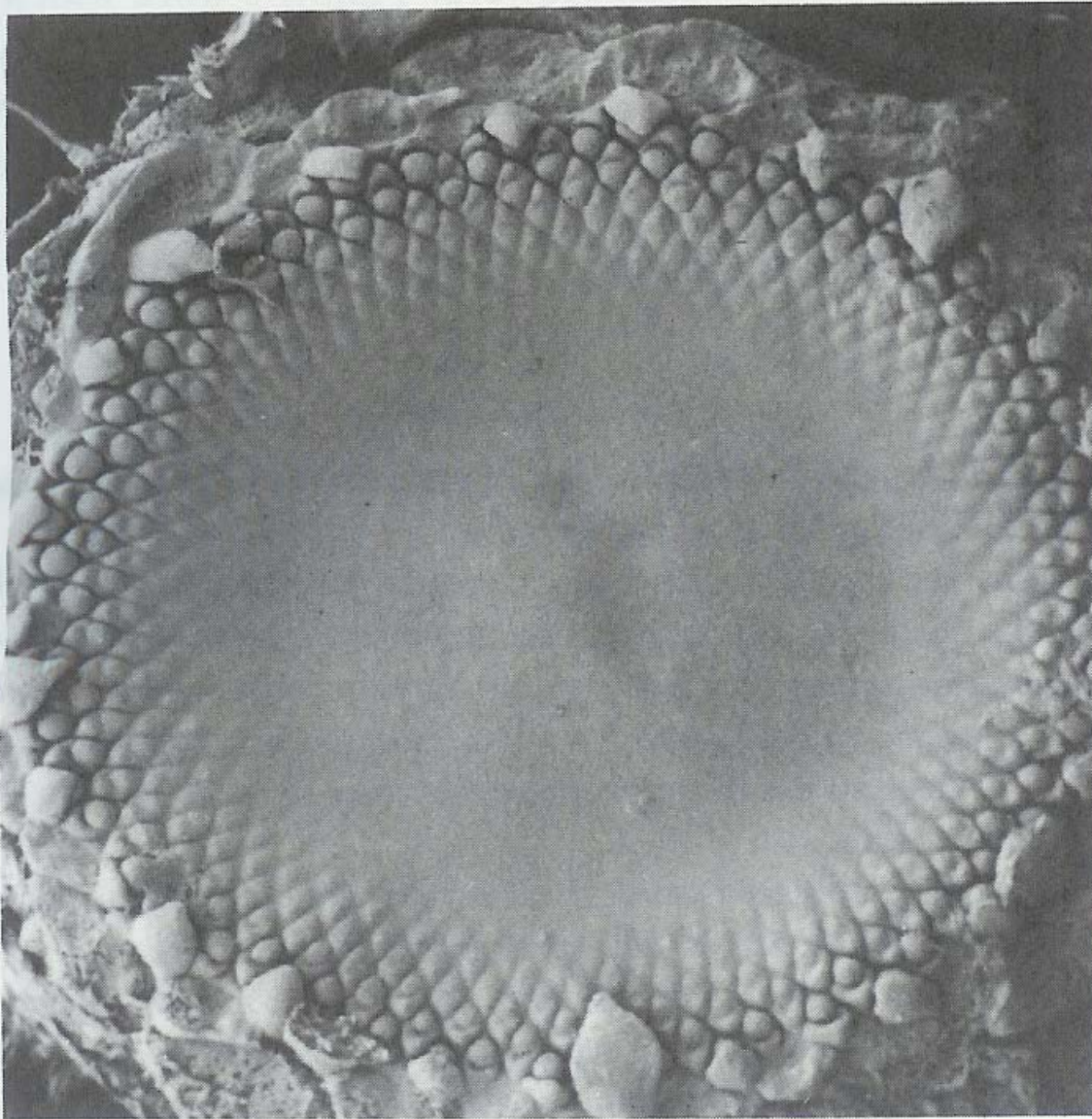
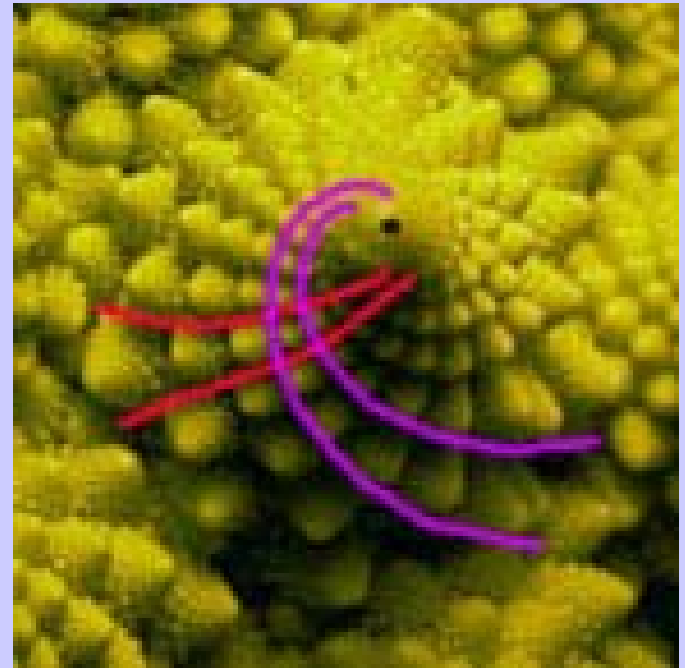


Fig. 1. The primordium of a very young capitulum of *Helianthus*

**Primordio de Girasol (con microscopio)** <sup>115</sup>

# DOUADY-COUDER experiment, 1992, Labo. Physique Statistique, Paris.Univ

Steph. Douady, Romanesco



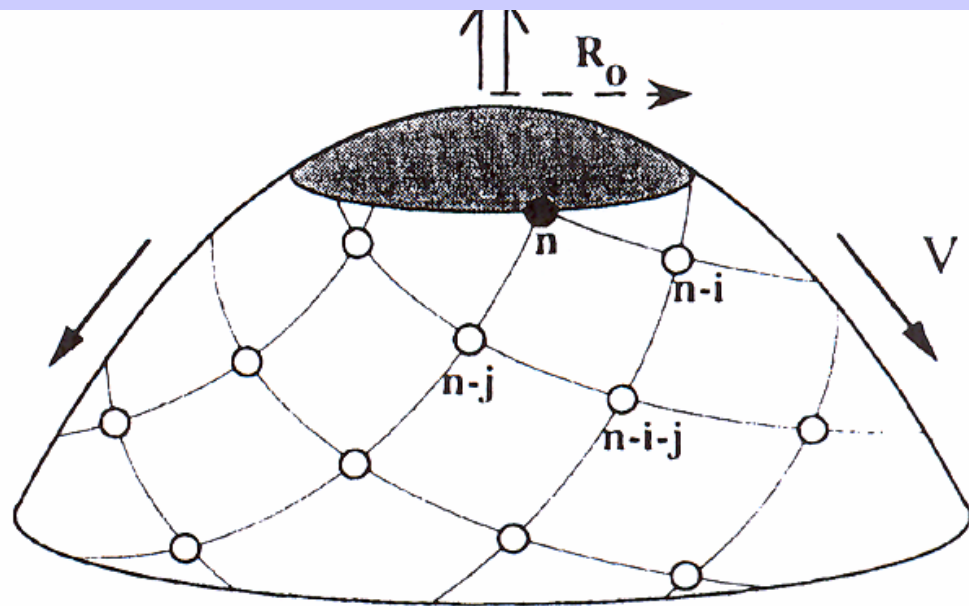
$$(10,16)=2(5,8)$$

bijugate

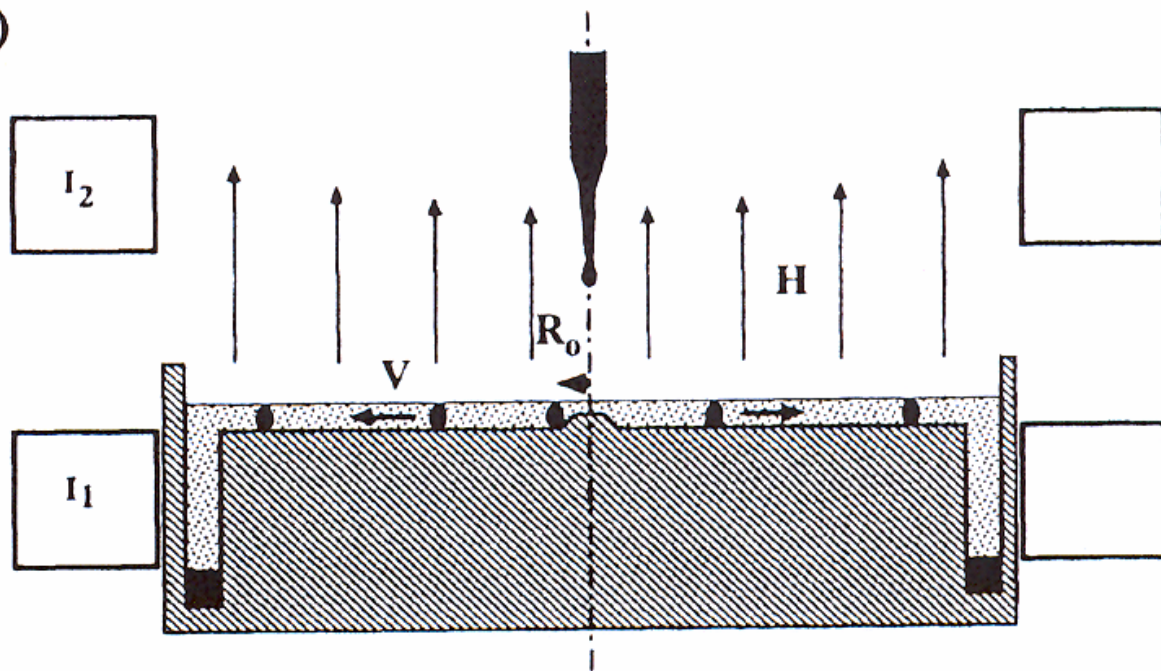




**Experimento DOUADY-COUDER :**  
lanzando gotas de un líquido magnetizado en un plato con campo magnético en su borde y lleno con aceite de silicona. Las gotas son atraídas por el borde y repelidas por las otras.

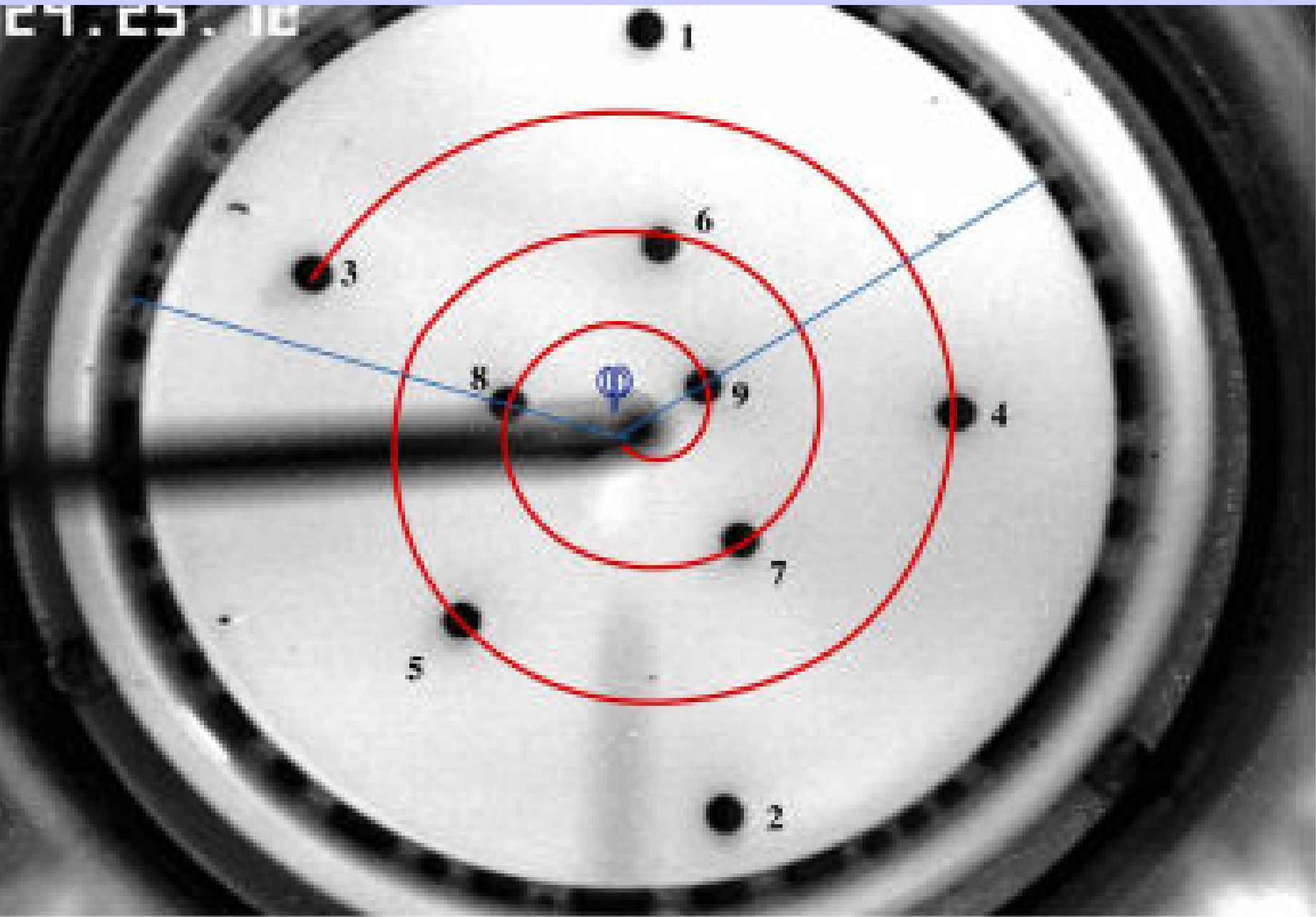


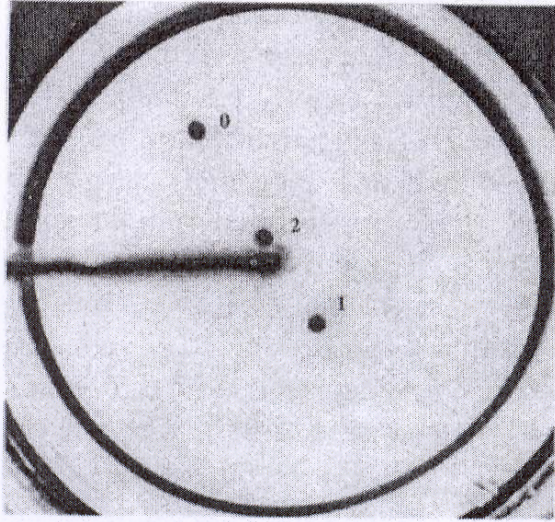
(b)



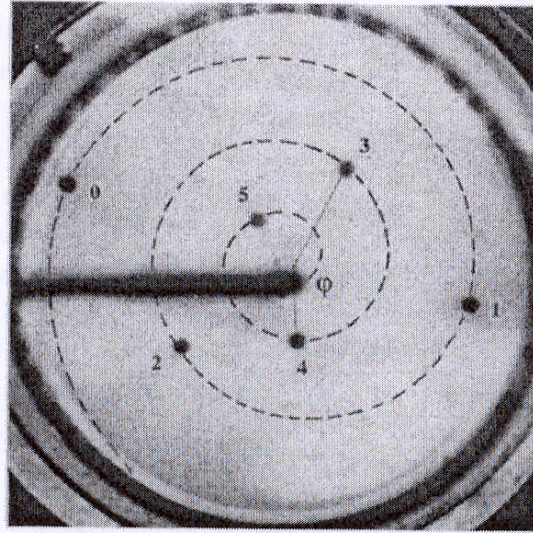


27.05.10

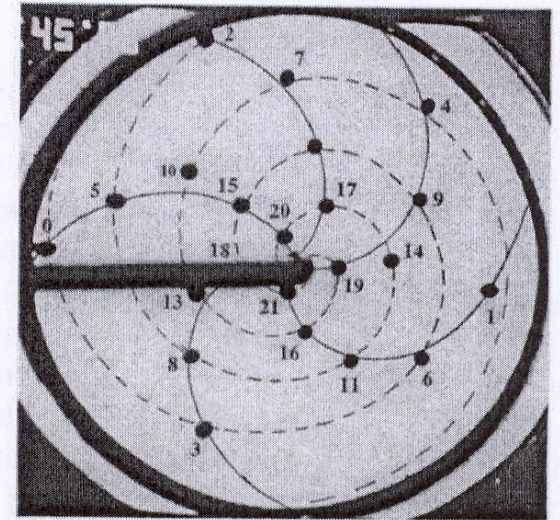




(a)

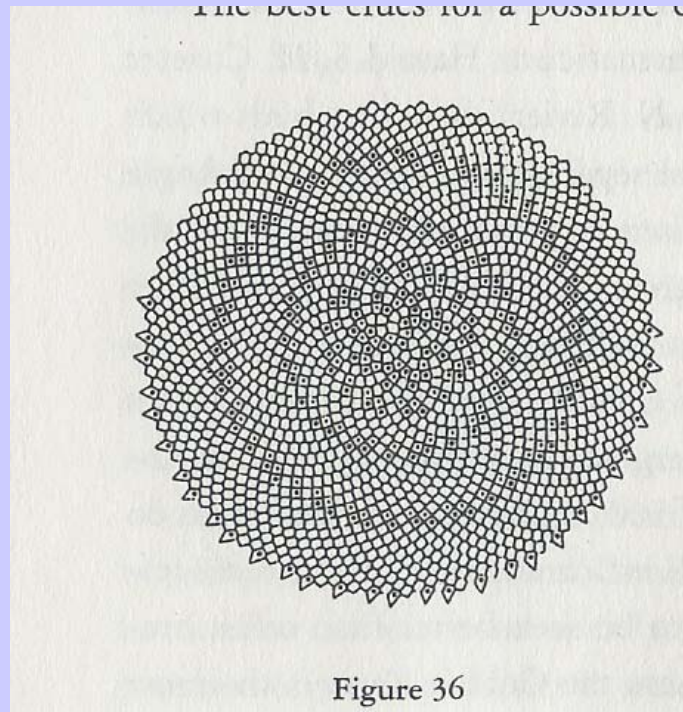


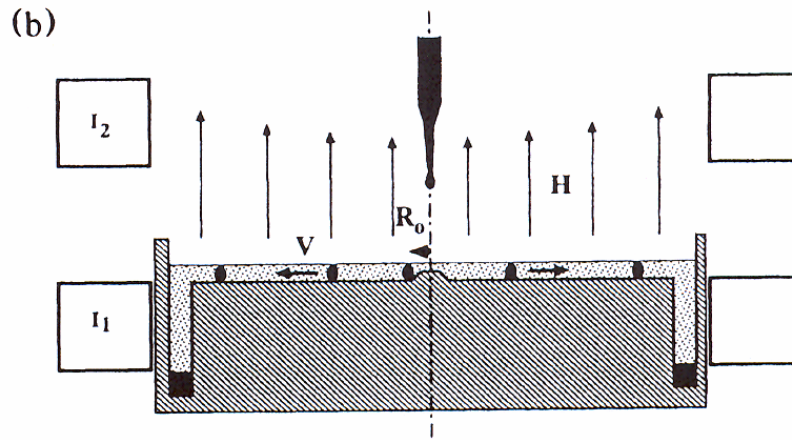
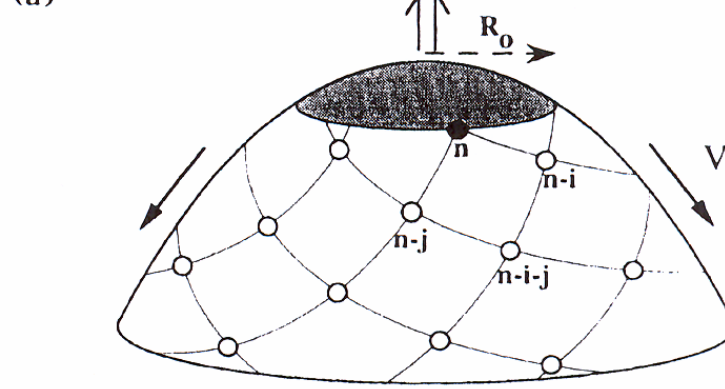
(b)



(c)

Quando caen despacio se mueven en direcciones opuestas. Al aumentar la velocidad (disminuir el plastocrono, tiempo entre dos brotes) se suelen disponer con ángulo de divergencia de aprox.  $137'507^\circ$





Parámetro  $G = V_0 T / R_0$  (velocidad radial, periodicidad y radio del ápice)



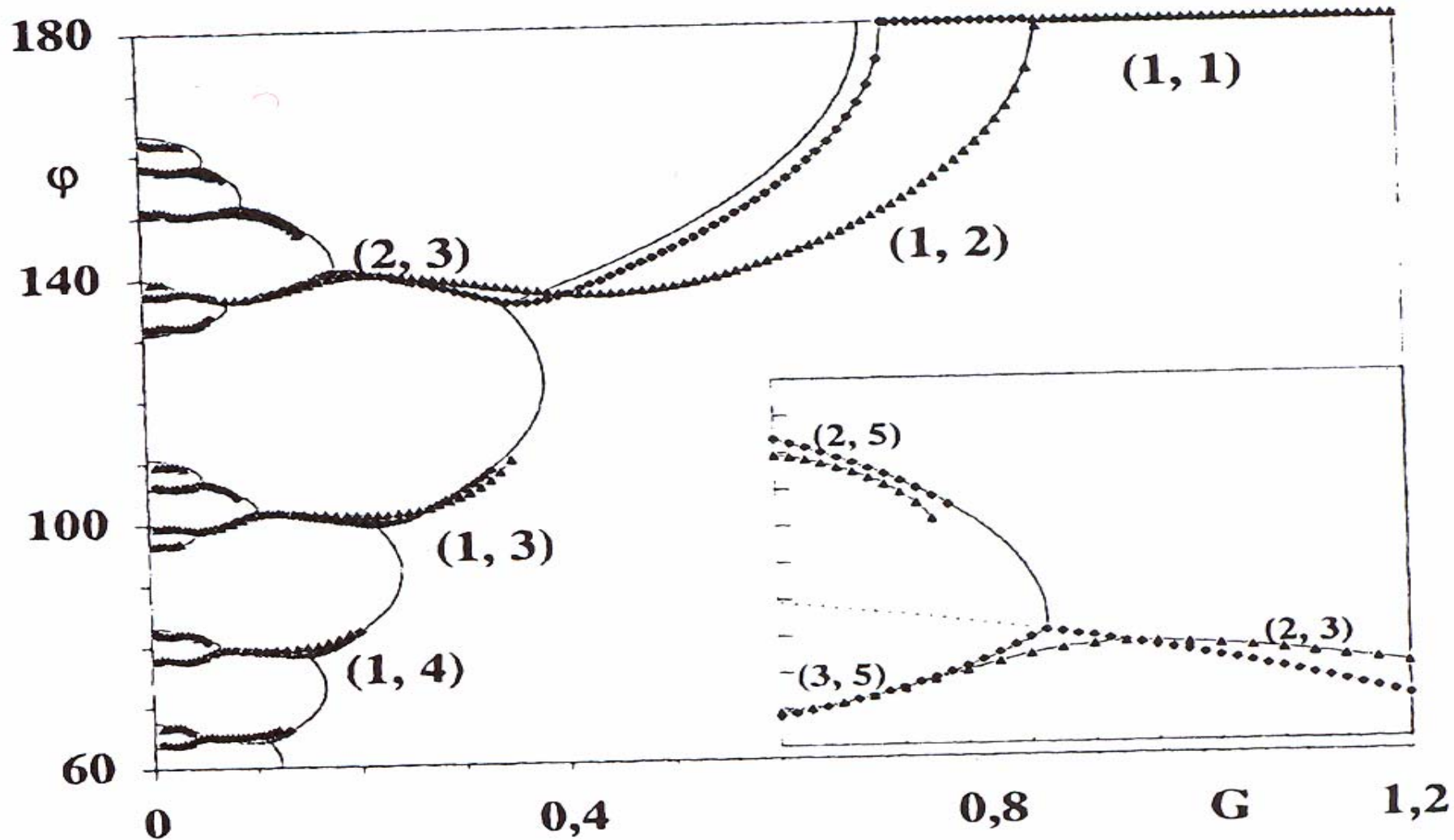


FIG. 3. Diagram of the steady divergences  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) obtained as a function of  $G$  for two energy profiles  $1/d^3$  (triangles) and  $\exp(-d/l)$  with  $l=0.1$  (squares). The solid line shows a diagram obtained using the geometrical condition. Inset: Detail of a transition.



Para  $G$  mayor que 1 la divergencia es  $180^\circ$ .  
Dependiendo del perfil de la energía de repulsión  
( $1/d^3$ ,  $\exp(-10d)$ ),  $d$  distancia, resultados  
cualitativamente iguales, salen bifurcaciones que de  
una rama  $(i,j)$  dan lugar a  $(j,i+j)$  e  $(i,i+j)$ . La  
divergencia tiende en general al ángulo áureo  
 **$137.507\dots^\circ$**

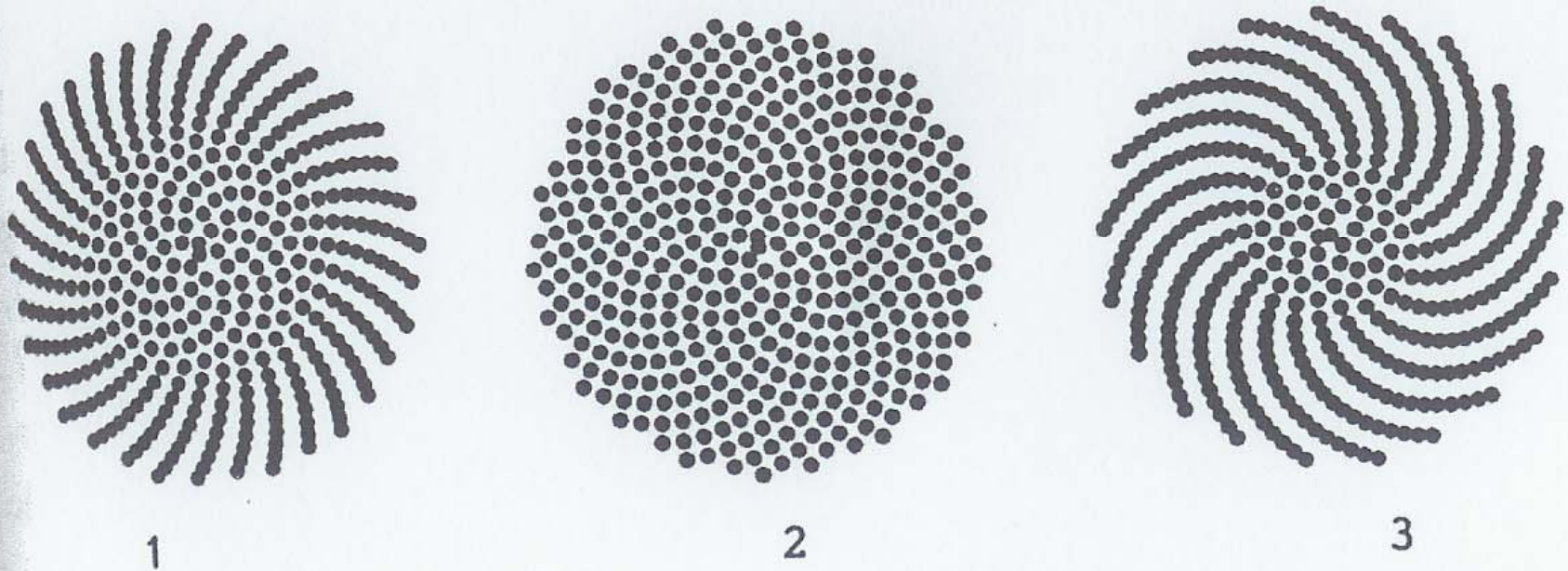


Figure 9.1. Depiction of the critical role of the divergence angle in packing efficiency: the three patterns differ only by a slight value of the divergence angle  $d$

**Ang. divergencia  $137'3^\circ$ ,  
 $137'507\dots$ ,  $137'6^\circ$**

**¿Qué ángulo es ése de  
137.507...° y por qué se le  
llama áureo?**

**Volviendo a la razón áurea ...**

**Dividir un segmento A en  
media y extrema razón  
(Euclides, siglo III a.c):**

**Es dividirlo en dos partes B y  
C que suman A y tal que si B  
es la mayor**

$$A/B = B/C$$



$$A = B + C$$

# Hoy simple problema de Algebra

$A/B = B/C$  con  $B + C = A$  da  
 $A/B = B/(A - B)$  o sea

$B/A = (A - B)/B$  es decir  
 $B/A = A/B - 1$ .

Llamando  $A/B = x$

$$1/x = x - 1$$

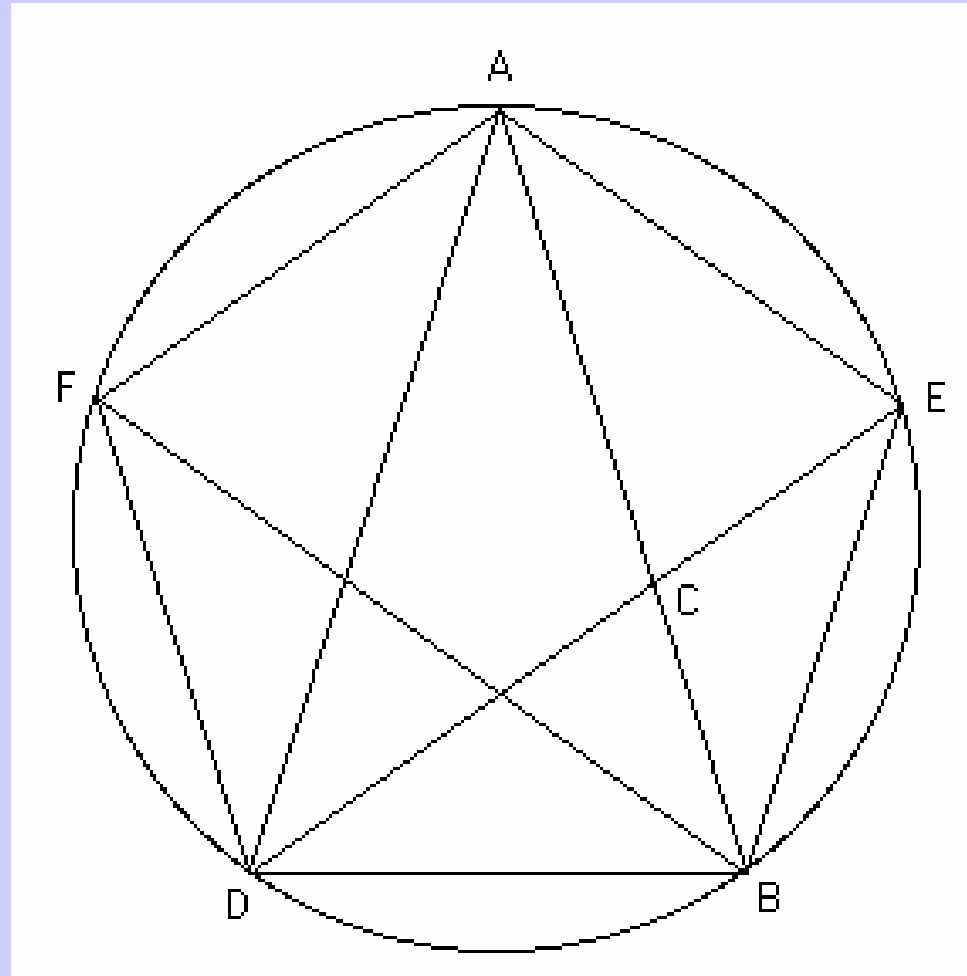
$$x^2 - x - 1 = 0$$

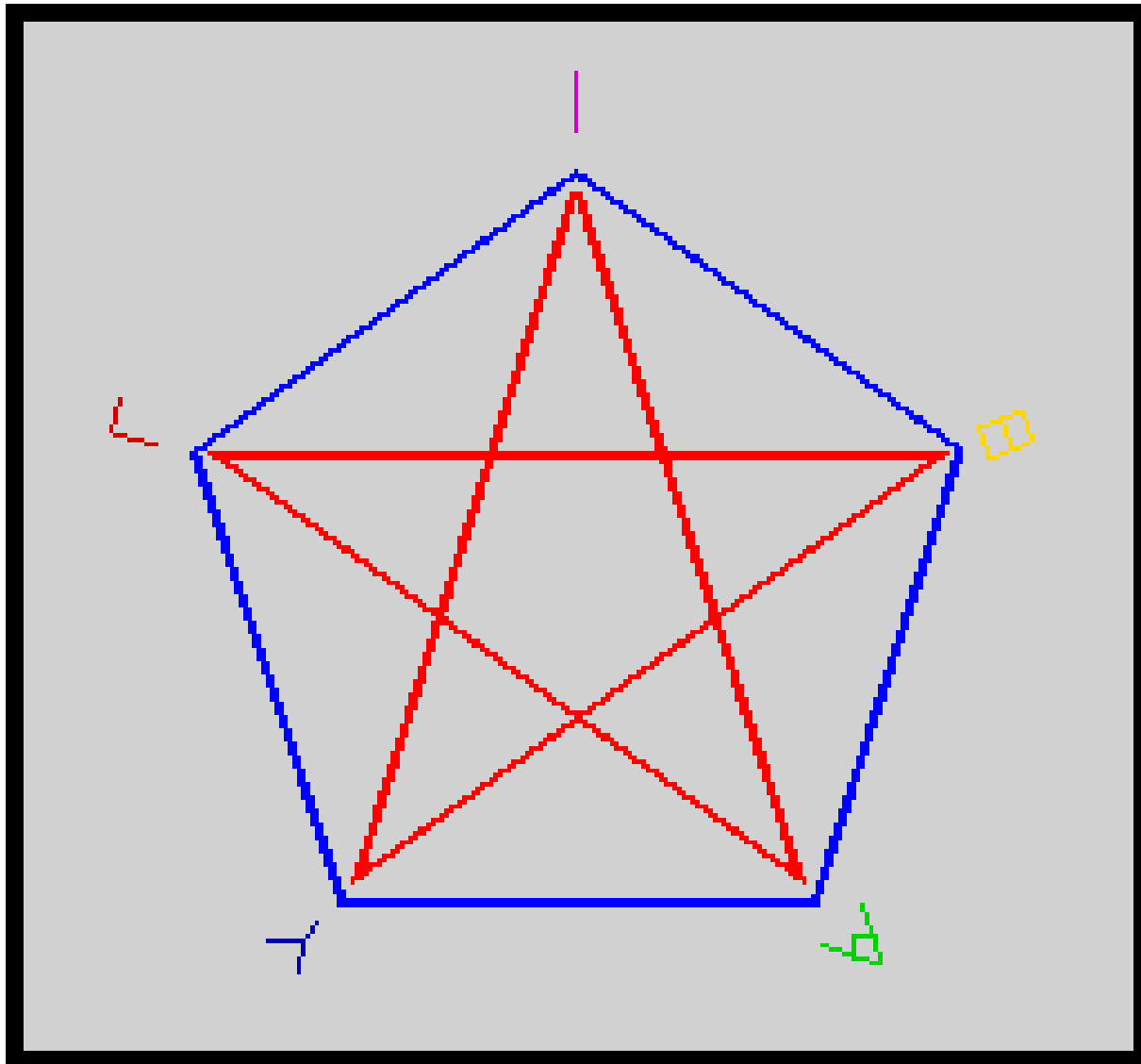


$$x = (1 + \sqrt{5}) / 2$$

$$x = -2 / (1 + \sqrt{5})$$

**Varios siglos antes de Euclides los pitagóricos conocían perfectamente el problema geométrico.**





**(UGIEIA).**

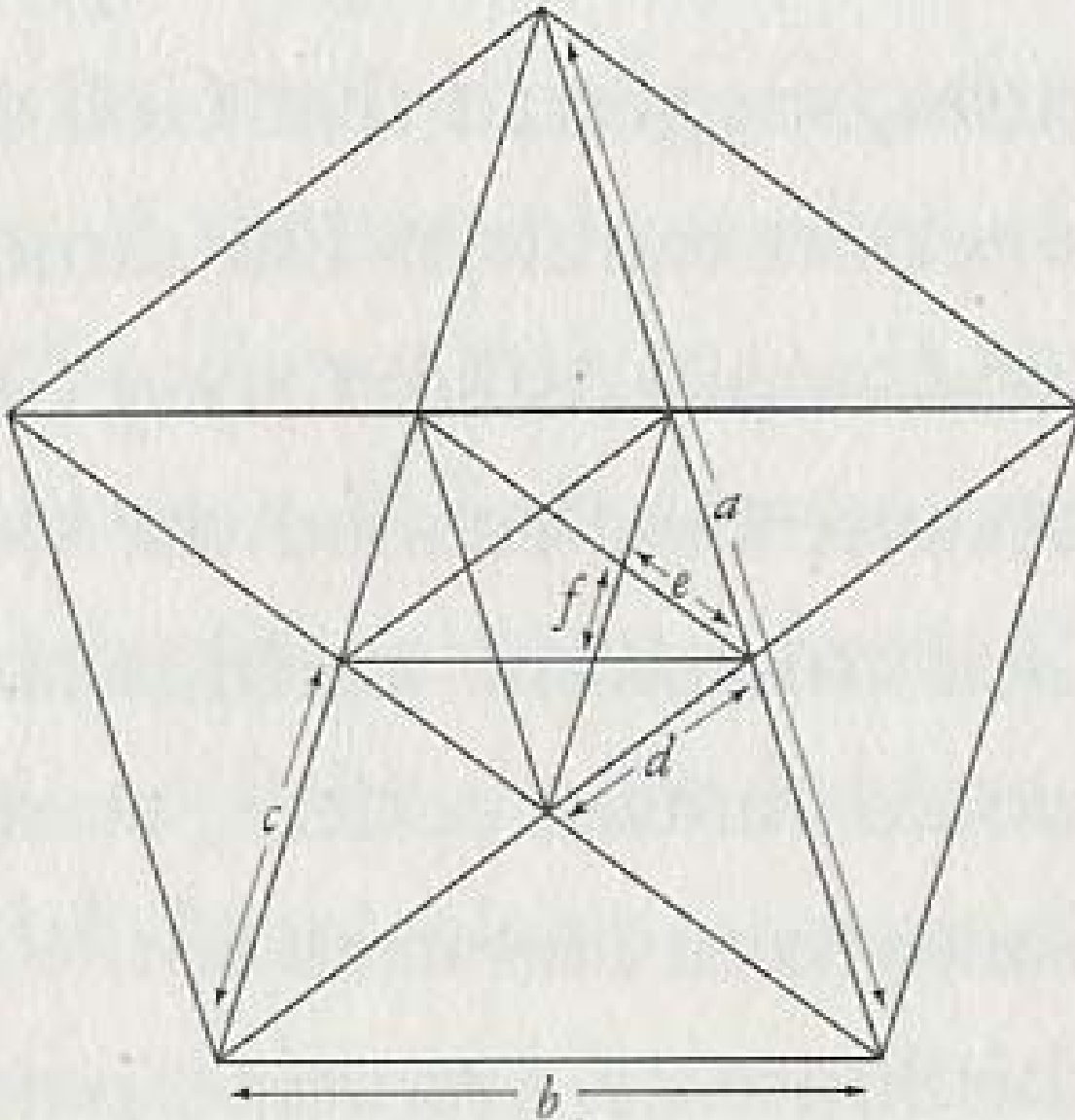


Figure 10

**Existencia de números irracionales (también la raíz cuadrada de 2,...)**

Fra Luca Pacioli, siglo XIV, **De Divina Proportione**, da 13 “extraordinarias propiedades” geométricas de esta proporción.

Libro ilustrado por Leonardo da Vinci?.



Luca Pacioli con un discípulo (J. De Barbari, Gal. Naz. Napoles) 1495.

Discípulo: Guidobaldo, Duque de Urbino?

A. Durero?



**Desde la antigüedad se habían dado valores aproximados de la proporción. Kepler, siglo XVI, da aproximadamente 0.6180340 para el segmento corto y 1 para el largo.**

**Kepler, y ya probablemente antes de él, sabía que los cocientes de la sucesión de Fibonacci tendían hacia la razón de la Divina Proporción, pero probado se atribuye a Simson, siglo XVIII.**

**Y a Binet (siglo XIX) se atribuye la fórmula**

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

**Se deduce el valor de la “divina proporción”  
como**

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398\dots$$

**Siglo XIX : “número áureo”, “razón áurea”, número de oro, etc. Y a principios del siglo XX se introduce para él (¿por Fidias?) el símbolo**

**$\Phi$**

**En Matemáticas es también corriente usar  $\tau$**

**Muchas propiedades (y mucha mitología) en el XIX y XX**

**Antes de ver propiedades, más  
Historia ...**

Luca Pacioli (Borgo San Sepolcro 1445-BSS 1517)

Franciscano desde 1472, profesor de matemáticas en Universidades y educador de nobles.

1494 compendio Summa arithmetica geometrica proportioni et proportionalita (600 pag) muy citada aunque no original, recopilatoria. De Computis et scripturis. Se considera el primer tratado de contabilidad (tablas doble entrada).

Mercaderes

Primer libro matem: Aritmetica de Treviso (aut.desc) 1478

Siguientes: Elementos (Venecia) 1482

Summa de la art de arismetica (Barcel.) 1482 Francesc Sancliment en catalan. Primero de España.

Version castellano Zaragoza hacia 1487. Multipl como hoy



Parte de regla de la cosa.

Fray Juan de Ortega, Palencia, Tratado subtilisimo de arismetica. 1512 Traduc. Frances en 1515, primero en ese idioma. Aritmeticas mercantiles por frailes

En la corte de Ludovico Sforza en Milan Pacioli se hizo amigo de Leonardo da Vinci (1452-1519).

En 1498 primeros manuscritos de De Divina Proportione. Primera impresión 1509. Incluye un Tratado de Arquitectura inspirado en Vitrubio y cuerpos geométricos . Dibujos de 60 poliedros atribuídos a Leonardo (? O de Pacioli con modelos de Leonardo?).



## Pacioli :**La Divina Proporción**

"llamada así por sus propiedades excelsas, supremas, excelentísimas, incomprensibles, inestimables, innumerables, admirables, inefables, singulares ..., que corresponde por semejanza a Dios mismo".

**El segmento es uno sólo como Dios pero se halla en tres términos como la Santísima Trinidad,** no admite una expresión de cantidad racional como tampoco se puede definir a Dios con palabras humanas, no se puede cambiar, como tampoco se puede cambiar a Dios, que es inmutable y, finalmente, es necesaria para la construcción del dodecaedro, que corresponde a los cuerpos celestes igual que Dios da el ser a los cielos.

# **Volviendo a la razón áurea o número áureo**



# Algunas de las muchas propiedades de $\phi$

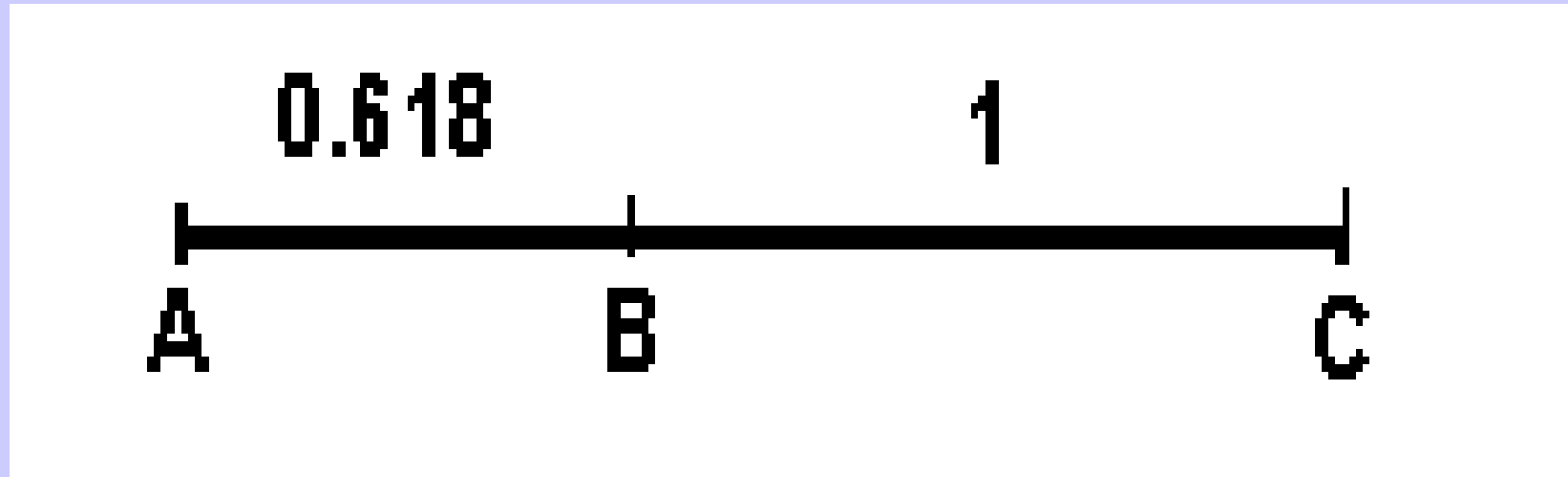
$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

$$1.618\dots - 1 = 0.618\dots = \frac{1}{1.618\dots}$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

# Número de oro o razón áurea

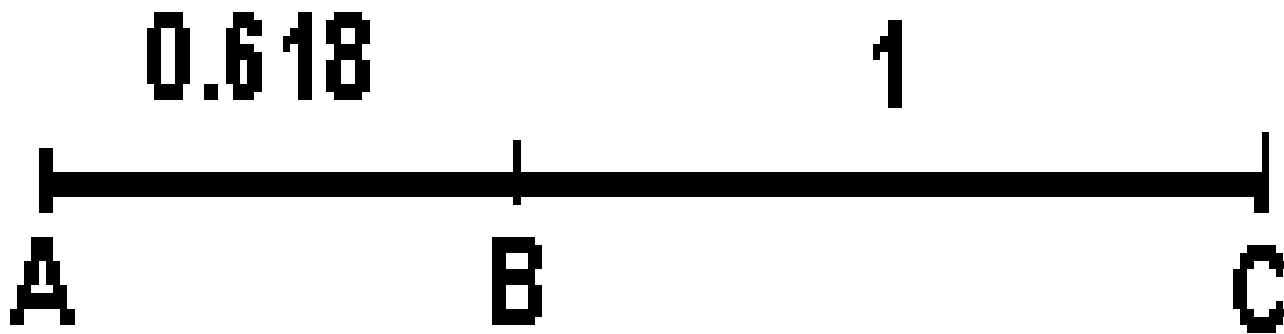


$$AC/BC = BC/AB$$

Hallar la razón áurea de un segmento.

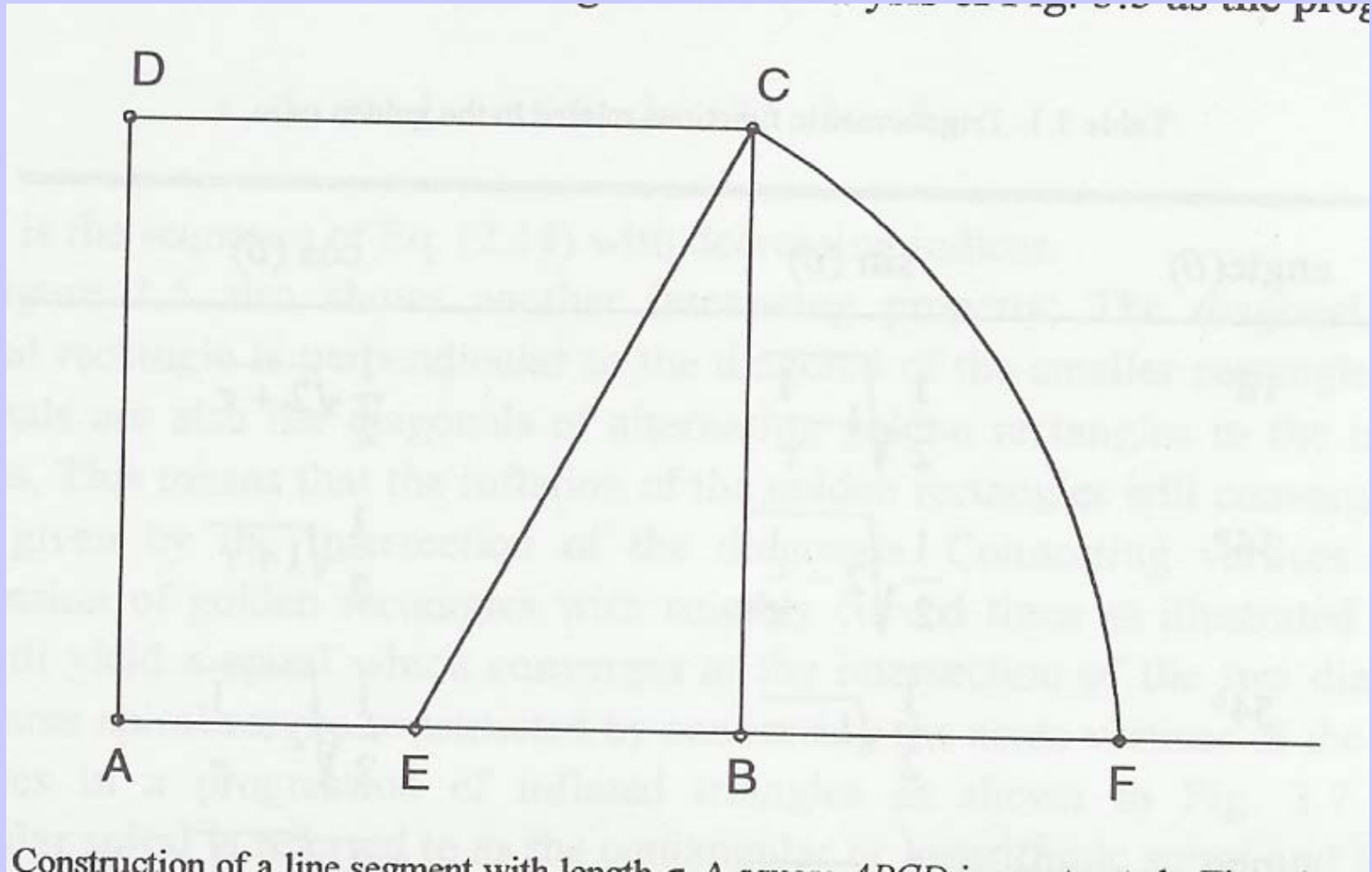
$$AC/BC = BC/AB$$

$$= (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398... \quad 146$$



**Si en BC se toma la distancia AB dando un punto D el BC queda partido por D en la razón áurea. Si ahora en BD a partir del D tomamos la distancia DC en dirección B dando un punto E el segmento BD queda partido por E en la razón áurea. Así sucesivamente (autosemejanza, geometría fractal)**

# Cómo construir la razón áurea fácilmente

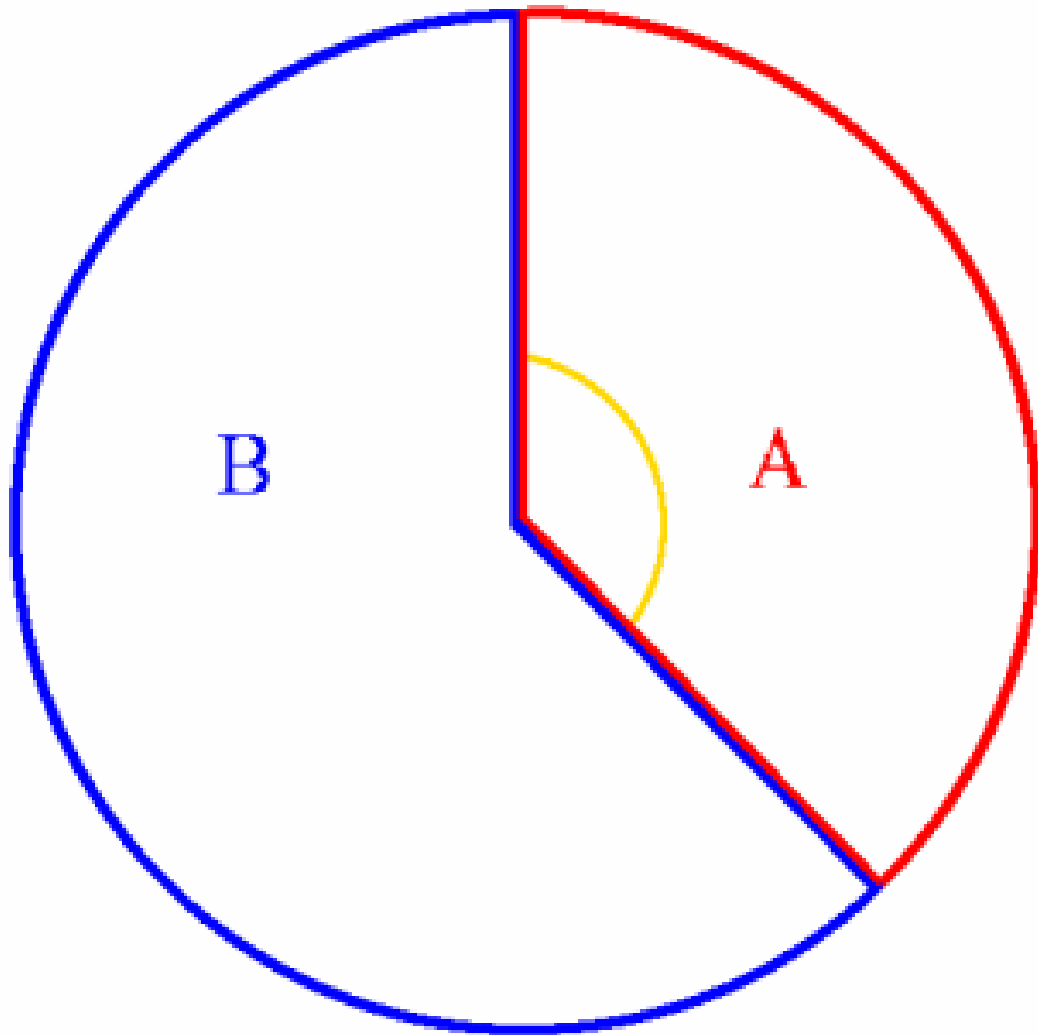


La razón de AF a AB es la áurea.

$$\Phi - 1 = 1/\Phi; \quad \Phi = 1 + 1/\Phi; \quad 1/\Phi + 1/\Phi^2 = 1$$

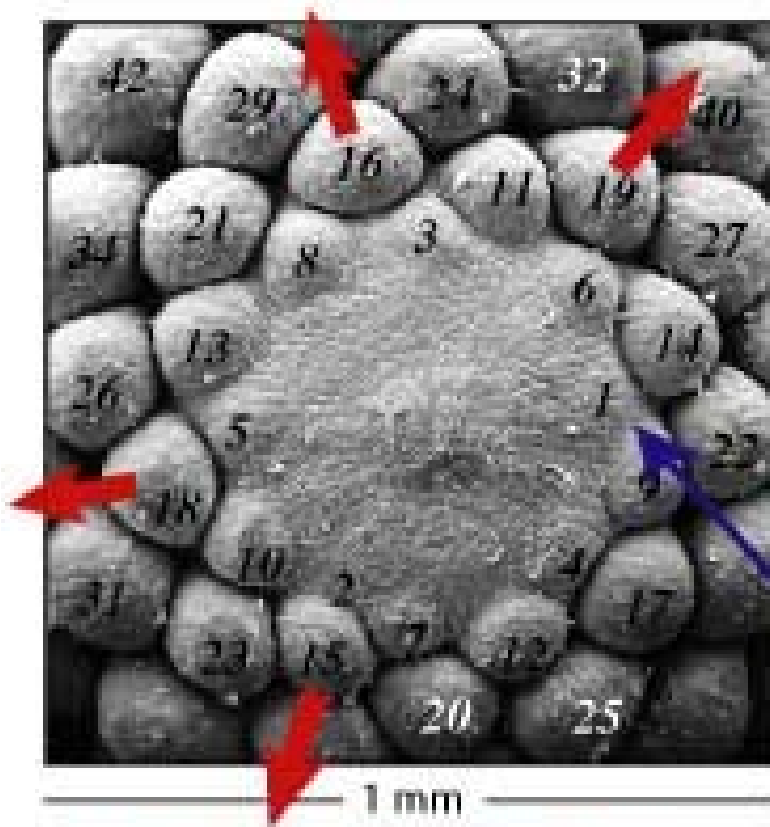
$$C/\Phi + C/\Phi^2 = C$$

**Si se divide un segmento, área, o ángulo  $C$  por  $\Phi$ , esa parte  $C/\Phi$  y el resto ( $C/\Phi^2$ ) están en razón áurea.**

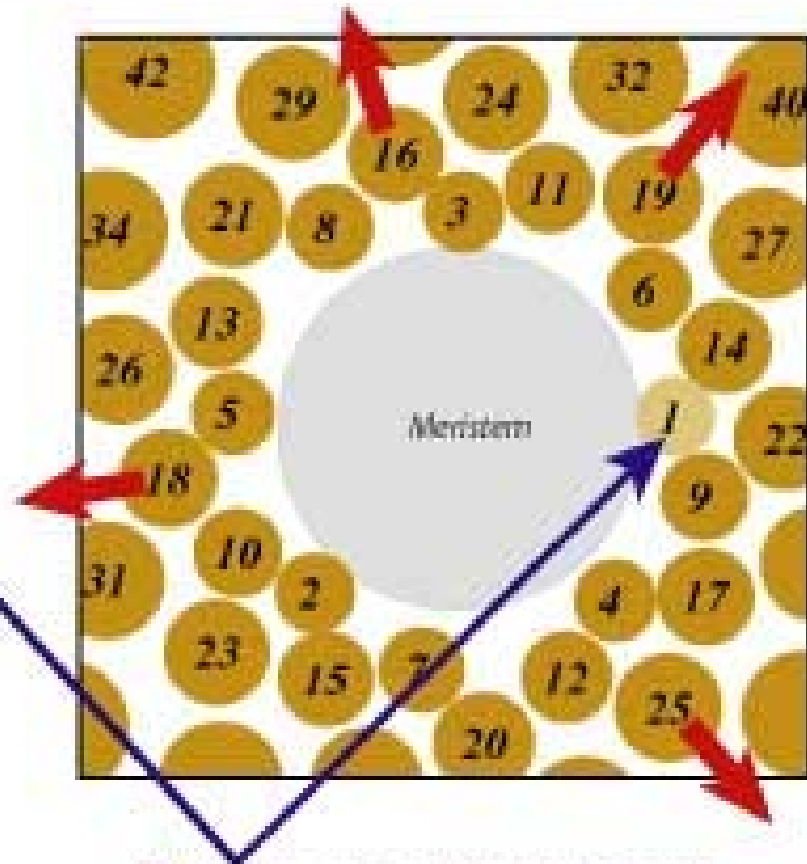


**Al dividir  
360° por la  
“divina  
proporción”  
sale  
B=222.4...°. y  
360-B= A=  
137.507...°  
Ángulo áureo**





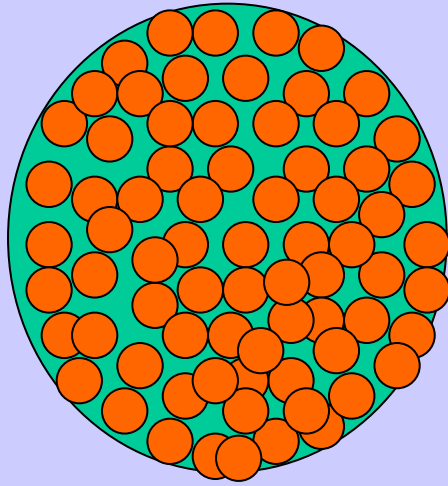
As they grow, older primordia are displaced radially away from the center of the circular meristem.

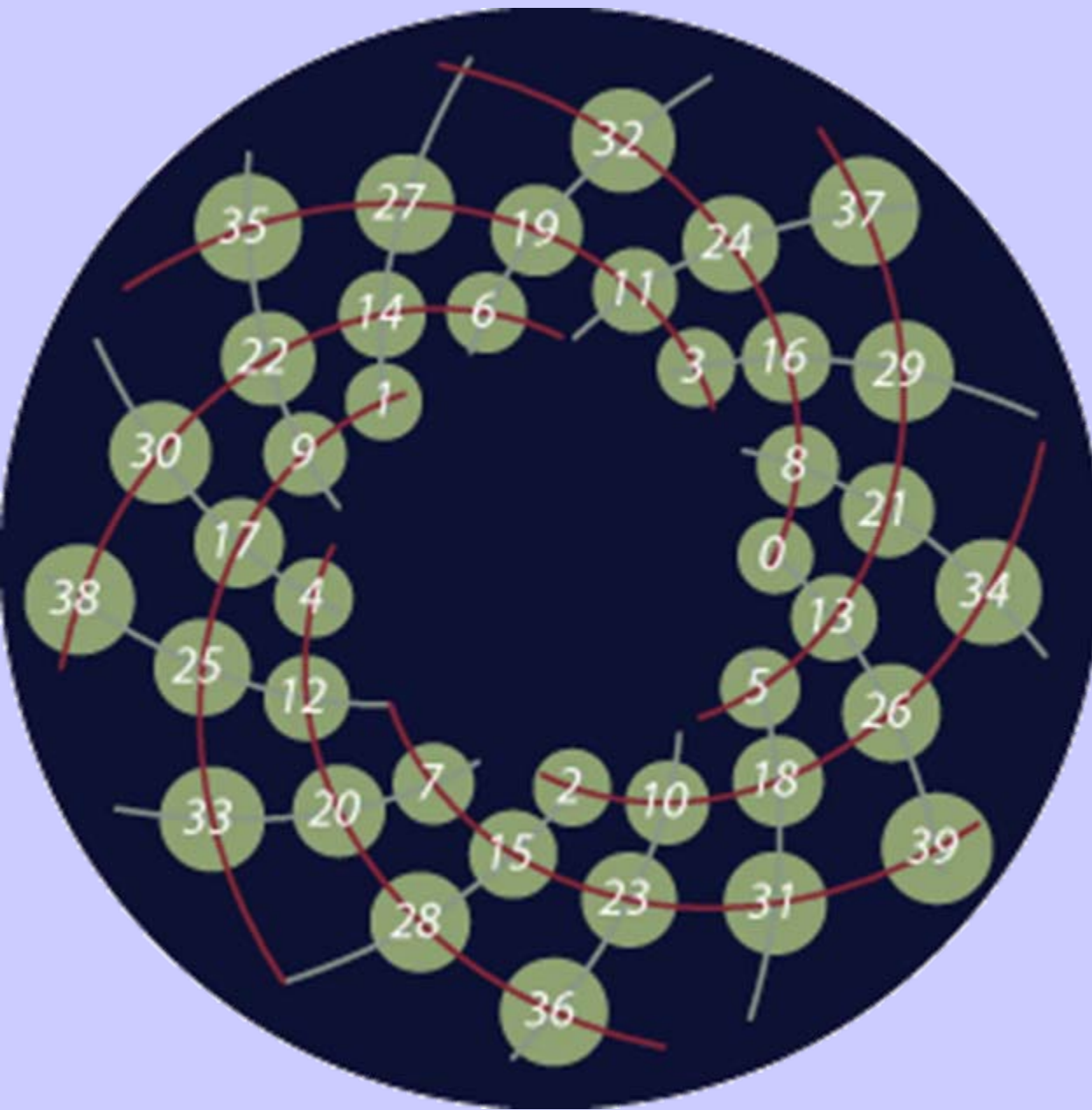


The new primordium initiates in the least crowded space at the edge of the meristem.

# ¿Por qué el ángulo áureo?

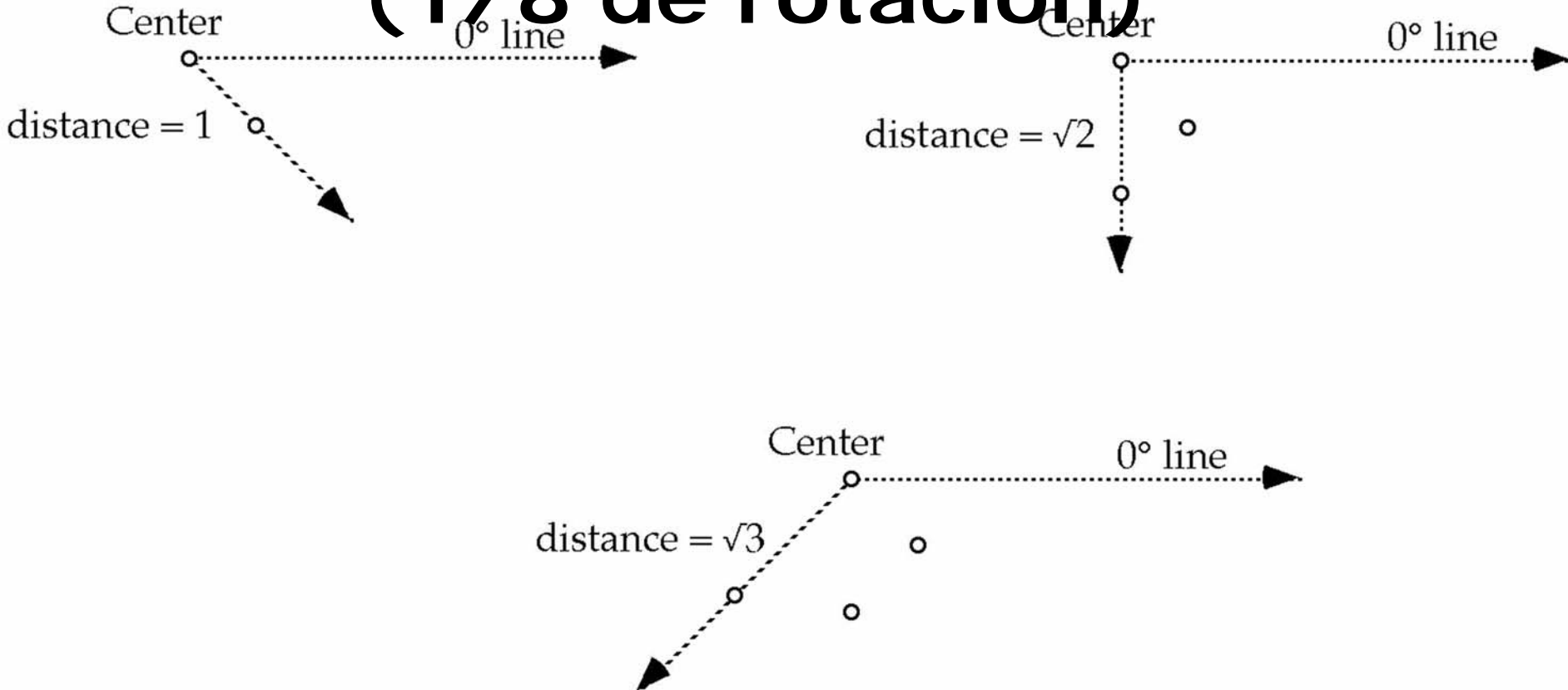
Recordar la formación de primordios en espiral. Si cada primordio tiene área 1, al cabo de  $n$  primordios (formando un círculo) el área es  $n$ . Como también es  $\pi R^2$ ,  $R$  (para el primordio  $n$ ) es proporcional a la raíz cuadrada de  $n$ .

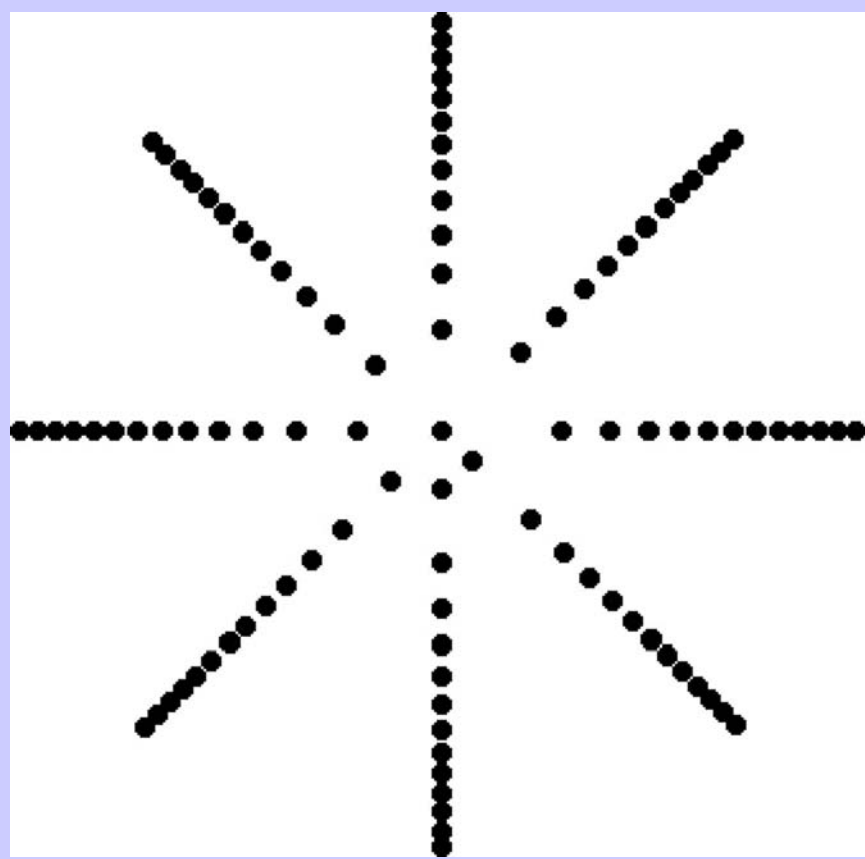
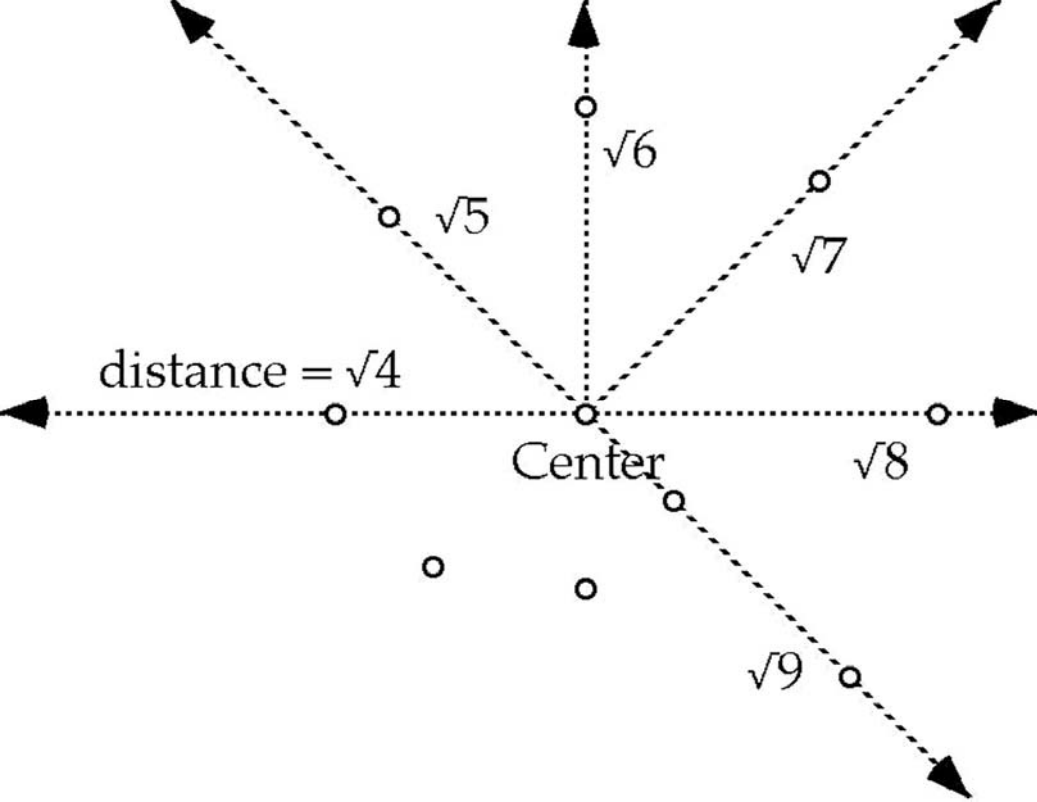




Los puntos más cercanos al 0 son el 8 por un lado y el 13 por otro (8 espirales rojas y 13 grises). El 0 ha aparecido en el lugar más libre del círculo interior. El siguiente (-1) iría ante el 7, luego al 6, al 5,...

De un primordio a otro varía ligeramente la distancia al centro y el ángulo (divergencia) con una recta fija. Ejemplo  $45^\circ$  ( $1/8$  de rotación)



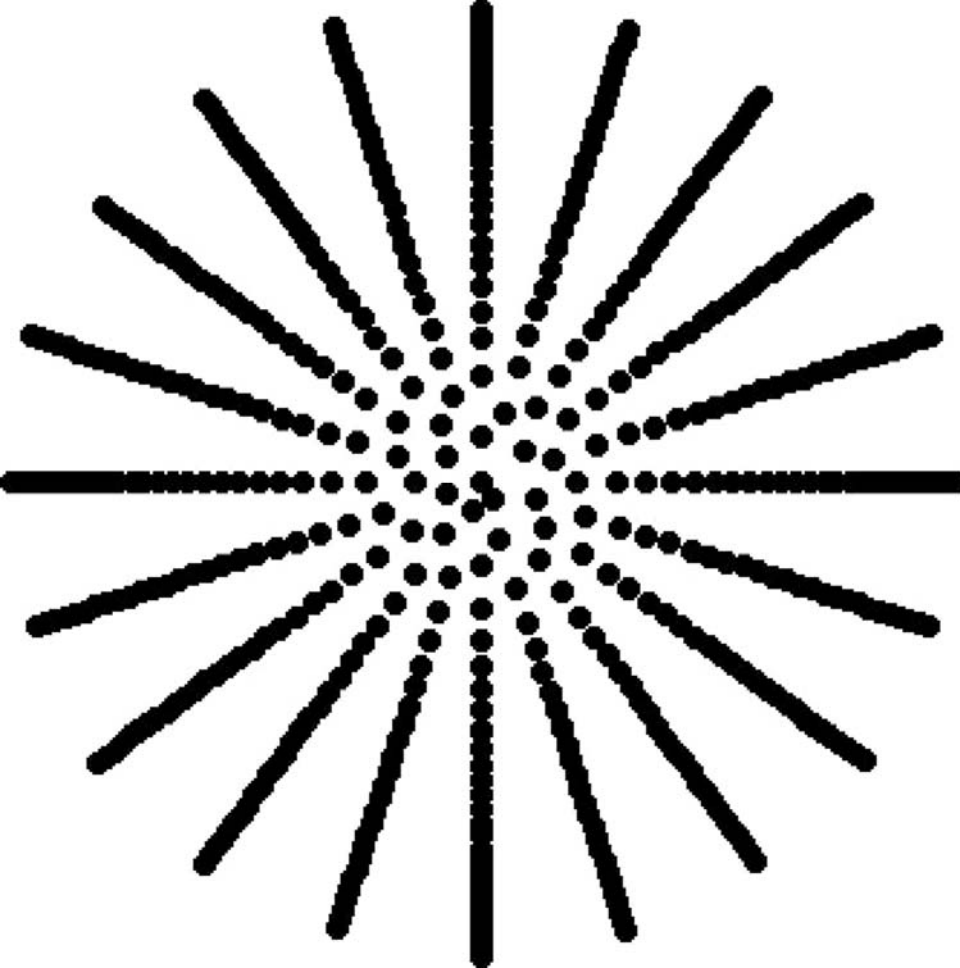


**Nueve primeros primordios**

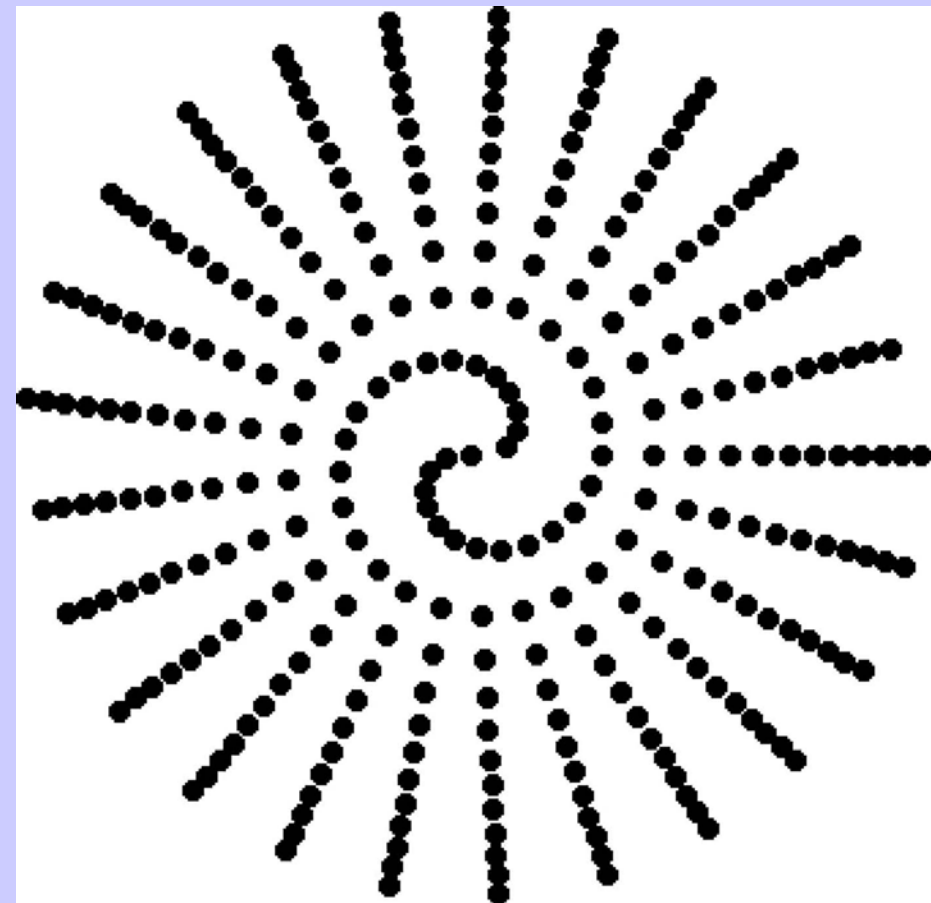
**100 primeros.  
¡ 8 brazos radiales!**



**Con  $54^\circ$  (0.15 de revolución= $3/20$  de revolución) se forman 20 brazos radiales (la semilla 20 se coloca en  $20 \times 3/20 = 3$  rotaciones)**



**$3/20=0.15$  de rev.**

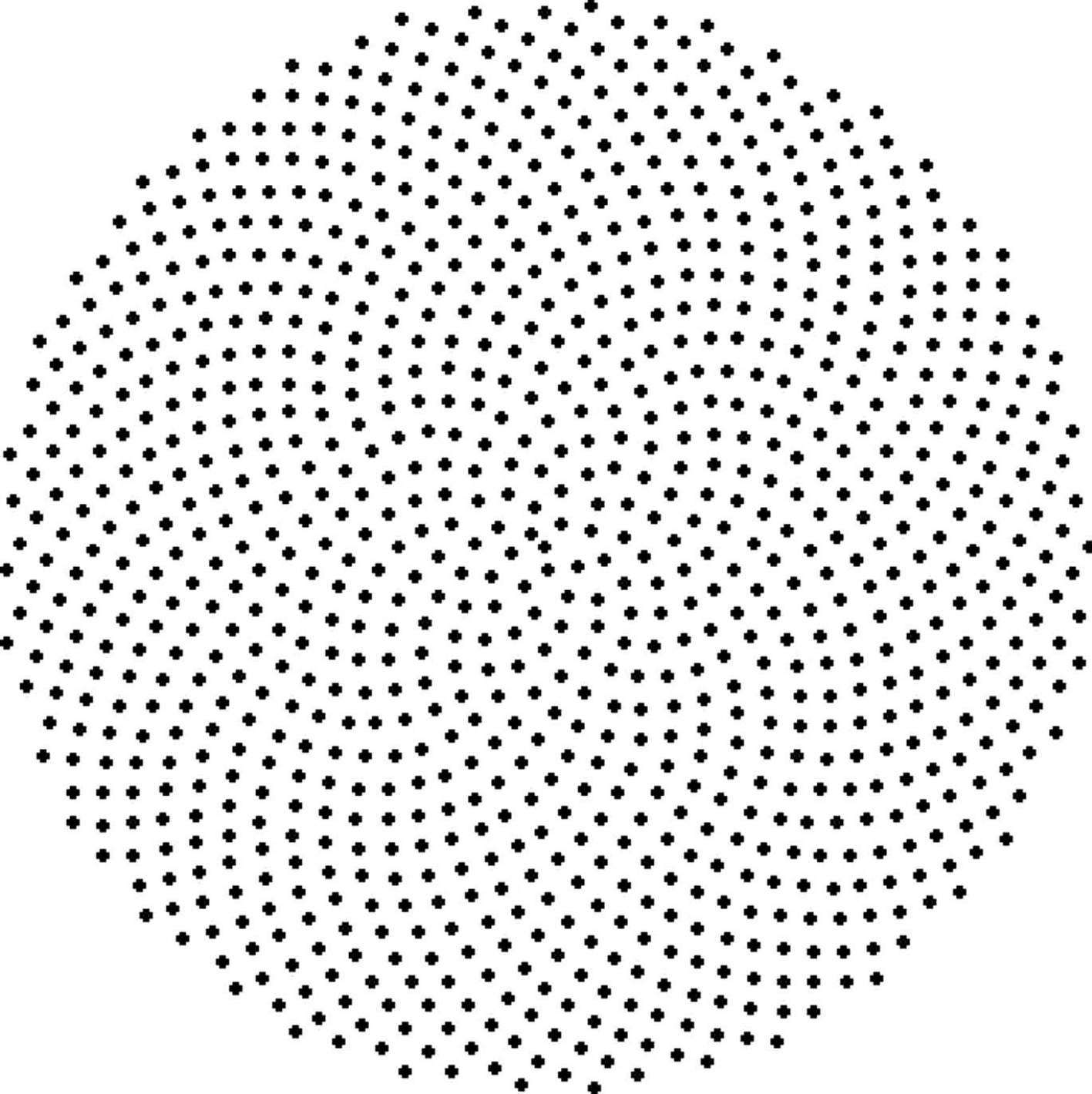


**$0.12=12/25,$**

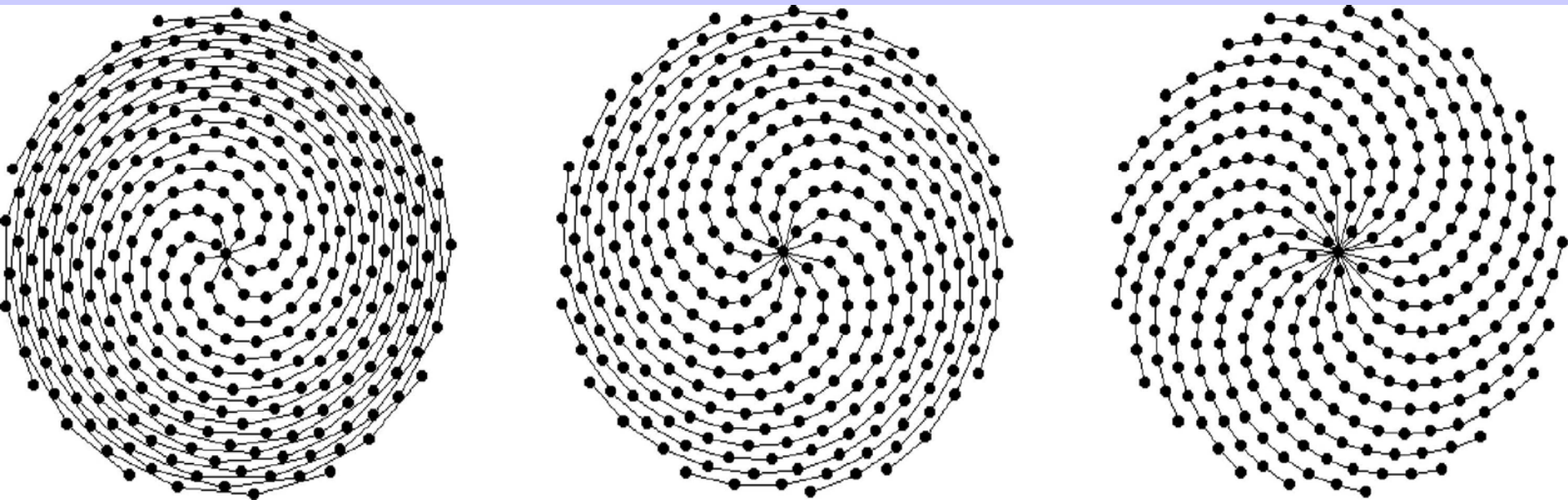
**25 brazos**

**Cualquier racional  $a/b$  con  $a, b$  primos  
entre sí dará  $b$  brazos.**

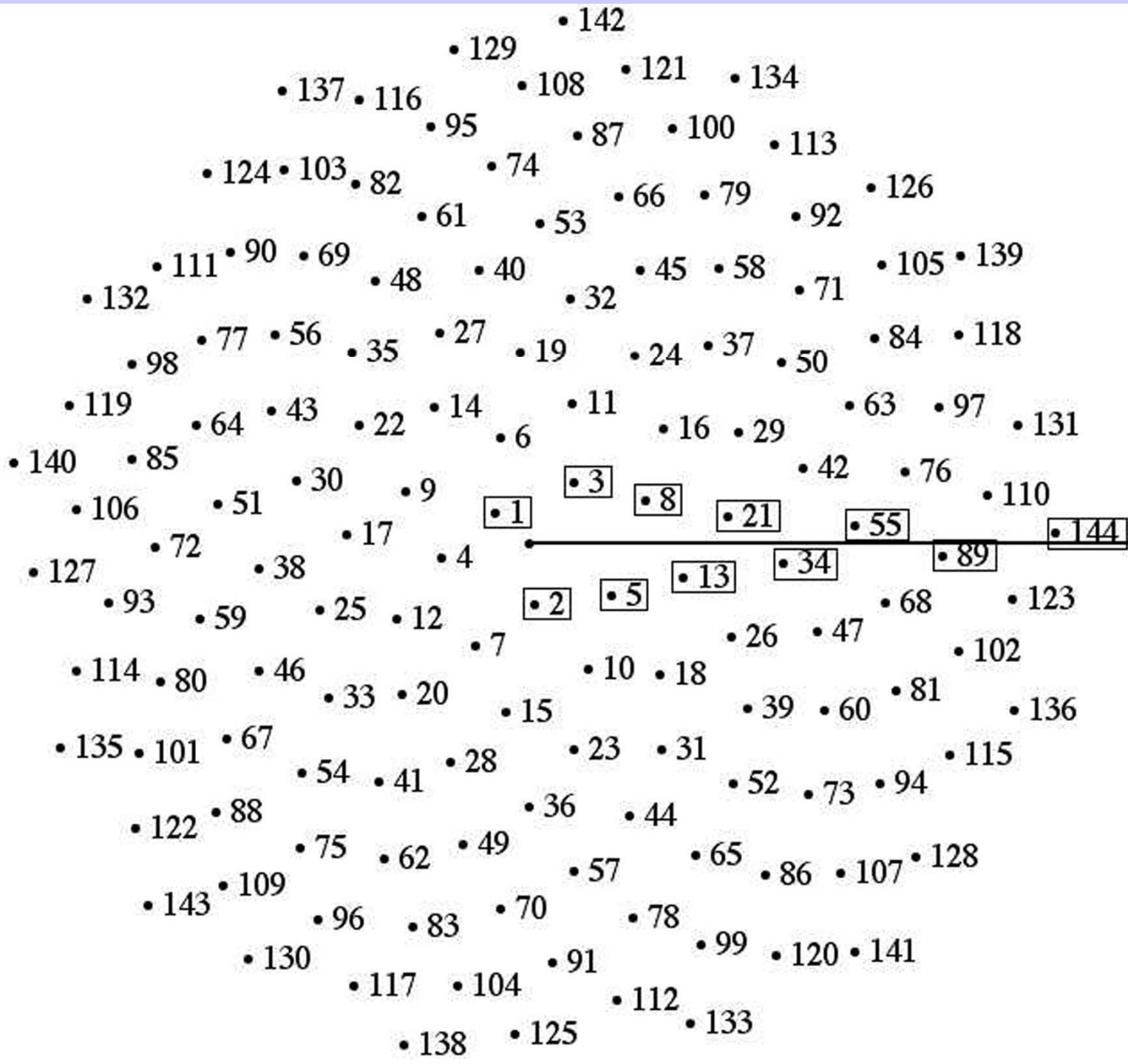
**El número áureo es irracional.**



**Simula-  
ción  
ángulo  
áureo y  
100  
semillas**



**Espirales en el ejemplo anterior:  
familias 8,13, 21.**



Núm.  
Fibonacci:  
cociente  
de dos  
consecuti-  
vos aprox.  
número  
áureo.



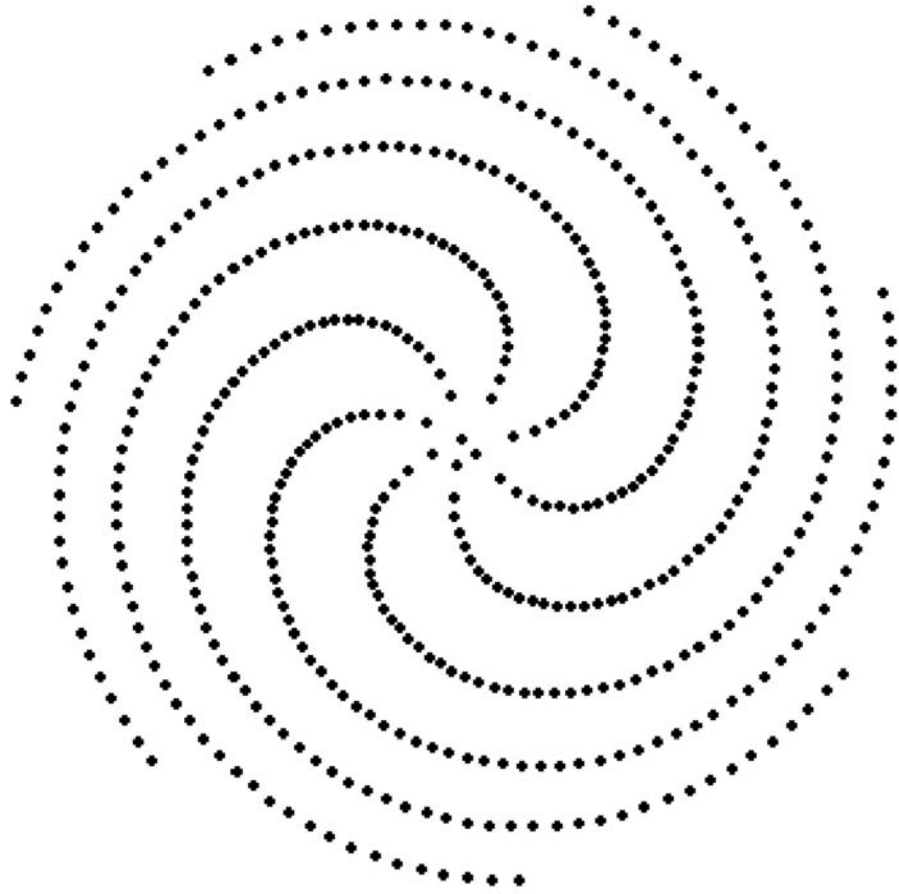
**Por ej: para 34 su ángulo es  $34 \times \Phi$ ,  $\Phi$   
aprox  $55/34$ ,  $34 \times 55/34$  aprox. 55  
revoluciones, 55.013. Ver 68, 102, etc.**

**Hay espirales con cada núm.  
Fibonacci. La vista nos engaña.**

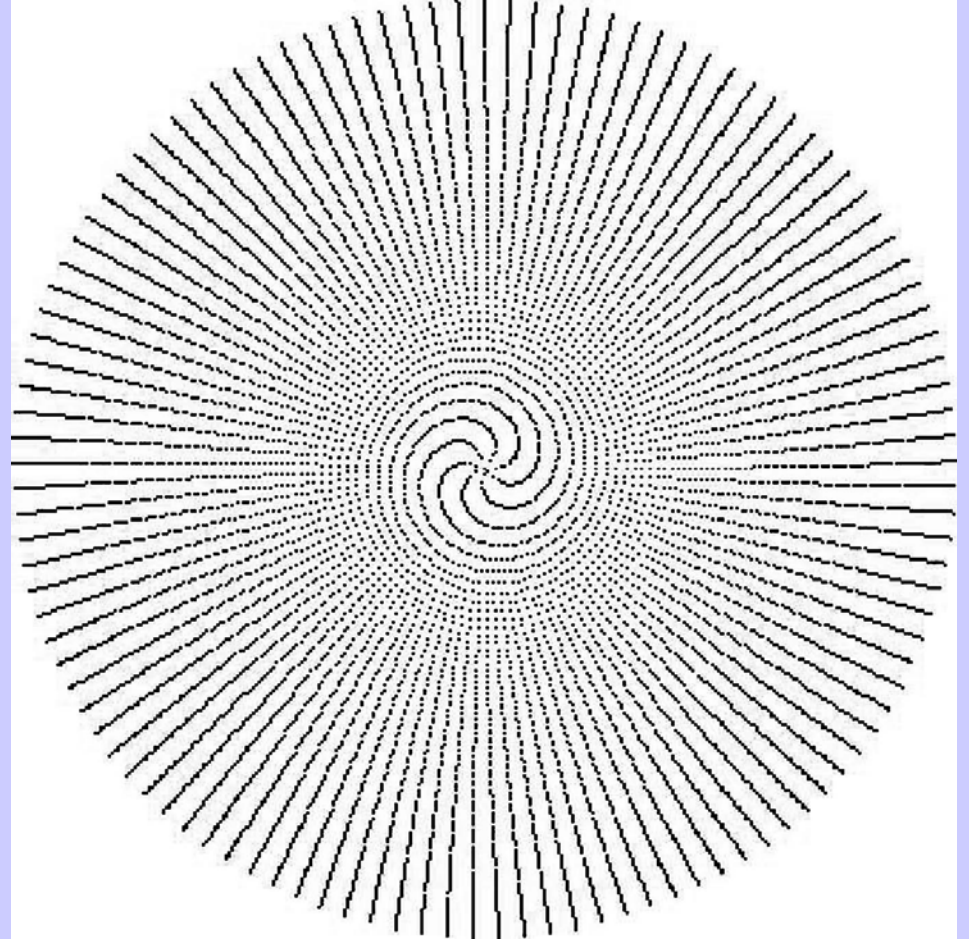
**¿Qué pasaría con  $\pi$ ?**

**3.14159 revol.=**

**0.141592 rev.,    aprox.50.97°**

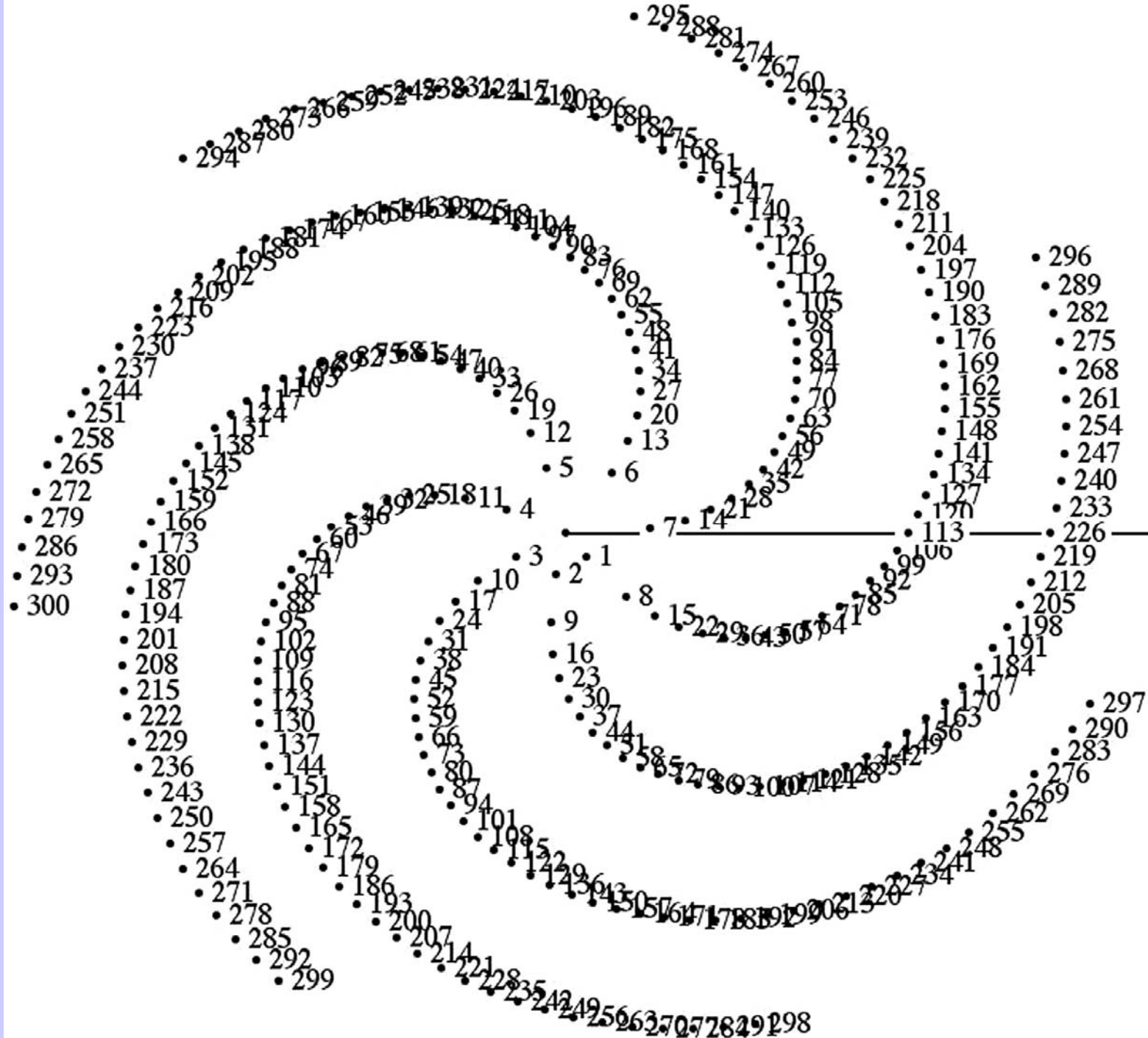


500 semillas, 7  
brazos

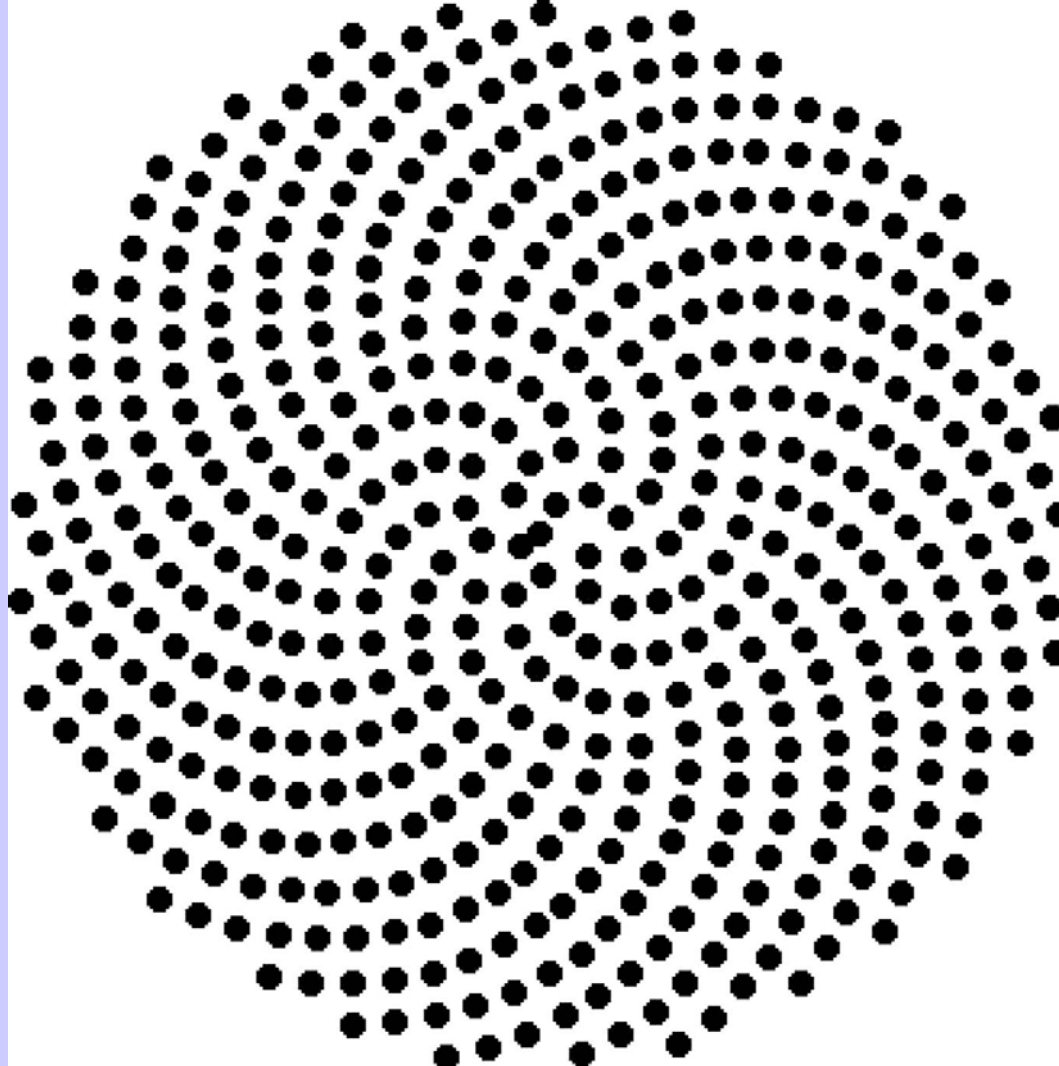


Hacia las 10000 son visibles  
113 con muy poca curvatura.  
Hasta 1 millon no hay otro  
conjunto prevalente.

**$22/7$  muy buena aprox. de  $\pi$  y  
 $355/113$  aún mejor. Observar los  
núm. en las 500 primeras**



¿Y con la raíz cuadrada de 2?  
1.41... Revol=0.41 revol.



Unimos  
las  
semillas  
de 1 en  
1, 2 en  
2, 3 en  
3,....168



# Fracciones continuas

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

Ejemplo:

$$127/52=2,442307692308$$

$$127/52=2+23/52=2+1/(52/23)$$

$$52/23=2+6/23=2+1/(23/6)$$

$$127/52=2+1/(2+1/(23/6))$$

Etc. En racionales el proceso es finito; en irracionales no.

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{3},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{8}{5}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{13}{8}.$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5},$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}.$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{1}{\frac{106}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106},$$

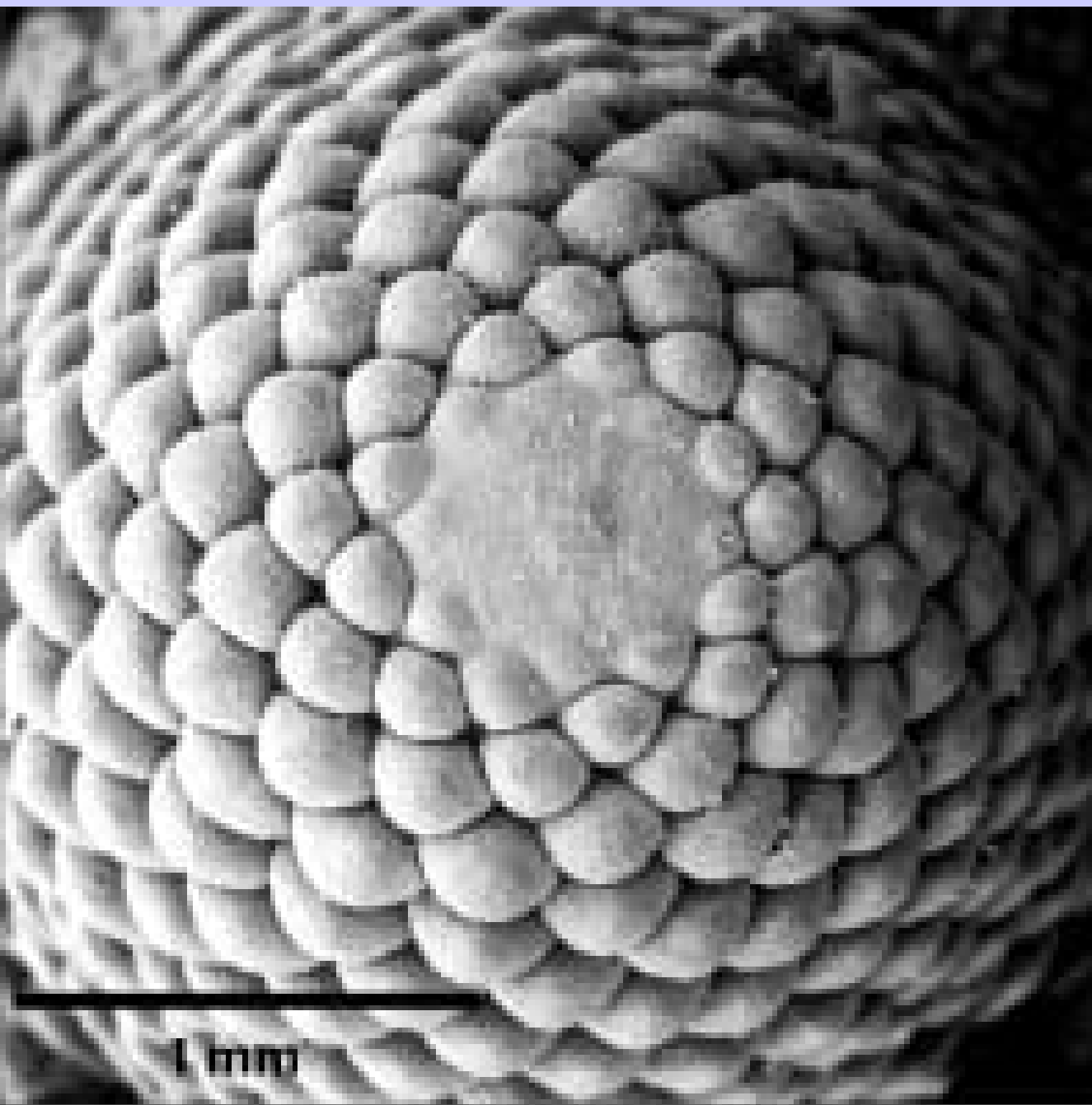
$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{7}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}.$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{292}{293}}}} =$$

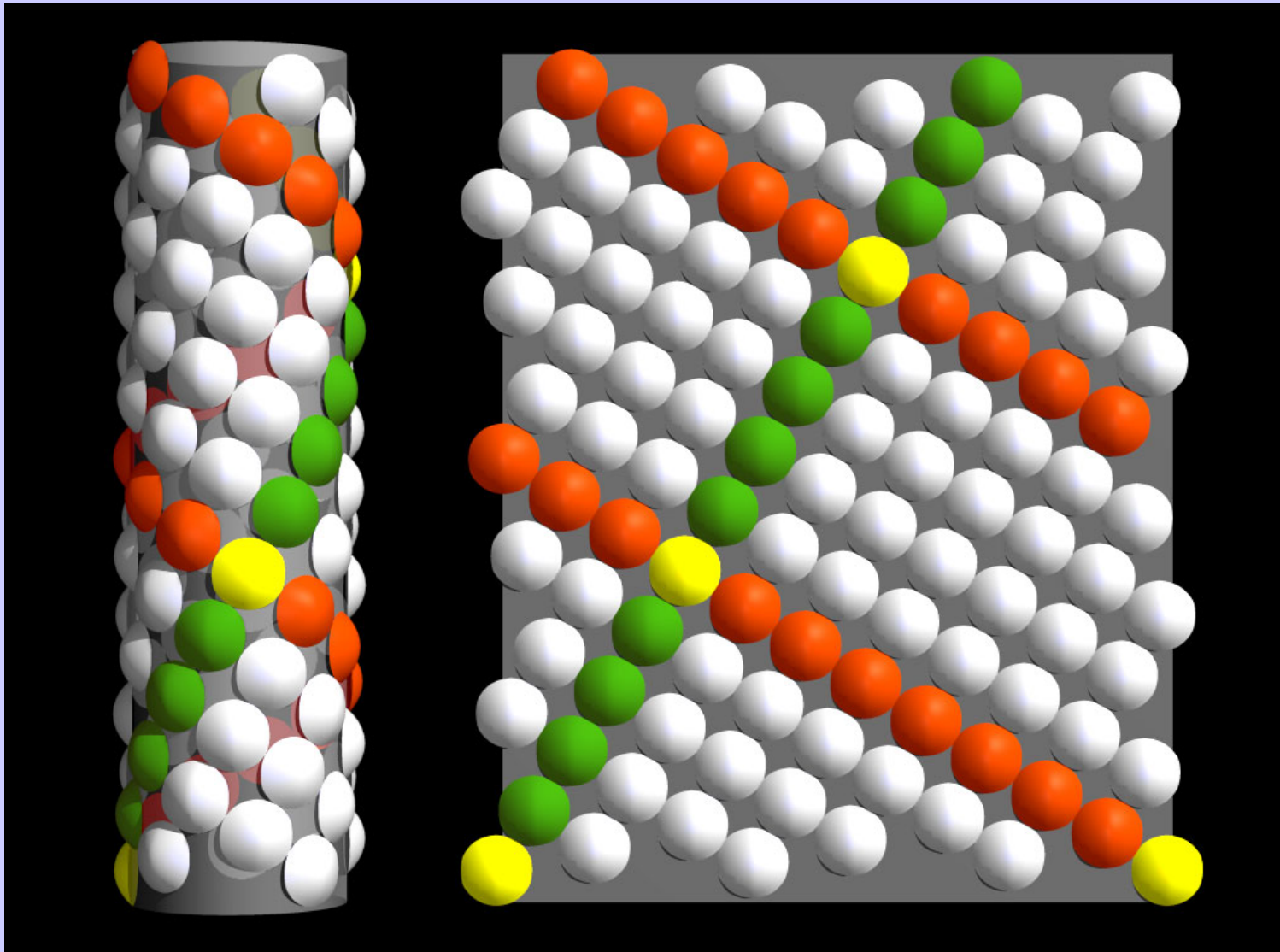
$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{293}{4687}} = 3 + \frac{4687}{33102} = \frac{103993}{33102}.$$

# El modelo cilíndrico





Primordios  
de las  
aguja de  
un abeto  
noruego  
con par  
(8, 13)



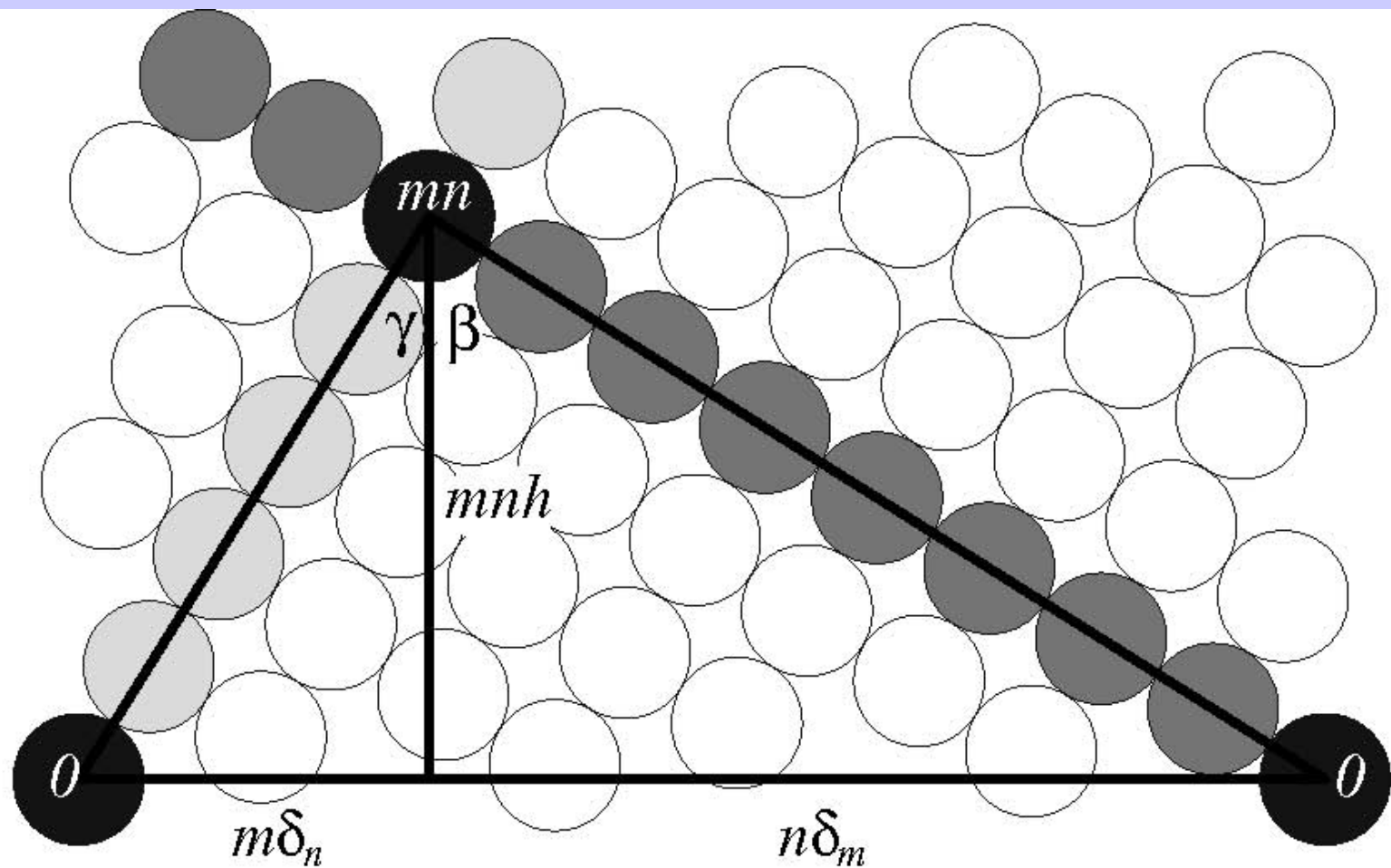


Figure 4.12: An opposite parastichy triangle (as in Erickson [36, Fig. 3.8]). The base is formed by the circumference of the cylinder. The sides are formed by the parastichies.

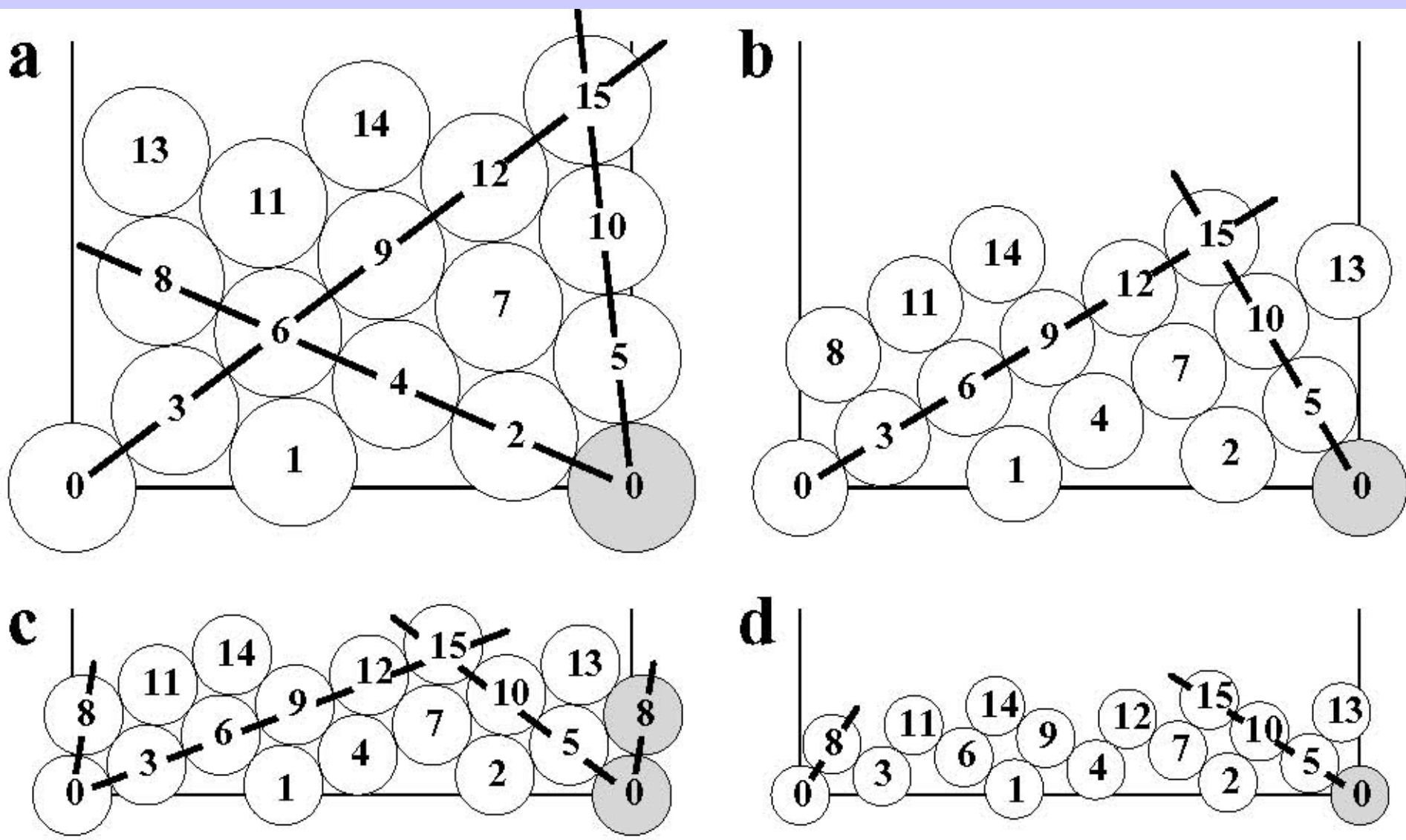


Figure 4.13: Patterns of tangent circles drawn on the surface of a cylinder as a function of circle diameter

**Muchos artículos y libros en últimos años dando modelos y simulaciones plausibles. Variando diámetro del ápice, velocidades y otros muchos parámetros se ve la posibilidad de muchos tipos de filotaxis. Unos muchísimo más frecuentes que otros en la naturaleza.**

**Artículo de G.J. Mitchinson:  
Phyllotaxis and the Fibonacci series**



# **Artículos de Smith, Kuhlemeyer y Prusinkiewicz:**

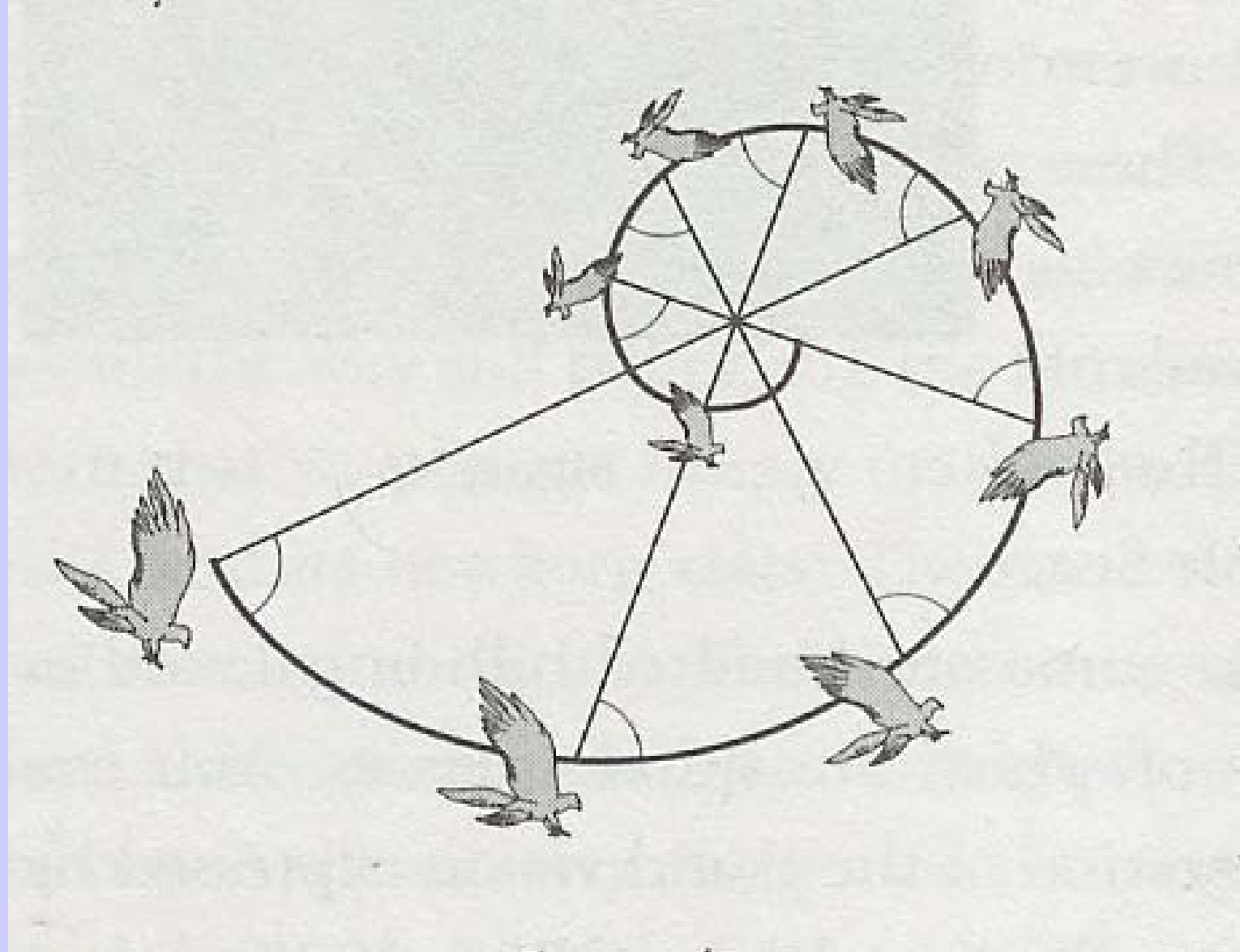
- A plausible model of Phyllotaxis.  
(PNAS 2006)**
- Inhibition fields for phyllotactic pattern formation: a simulation study. (Can. J. Botany 2006).**

Varias interpretaciones compatibles para la inhibición.

# **Una última espiral (logarítmica) en el reino animal**







**Halcón peregrino: Vuelo espiral logarítmica**

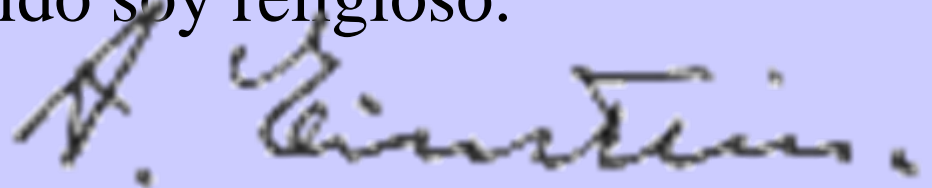
**V. A. Tucker (Duke Univ): Experimentos en túnel de viento que debido a la posición de los ojos la espiral logarítmica les permite ver siempre a su presa. En línea recta tendrían que ir girando la cabeza continuamente. (J. Experimental Biology 2000)**



*"Mi Credo"*  
Einstein, Berlin 1932

La más bella y profunda experiencia que un hombre puede tener es el sentido de lo misterioso. Es el principio subyacente de la religión, además de todo intento serio en las artes o las ciencias. El que nunca ha tenido esa experiencia, a mí me parece, si no muerto, por lo menos ciego.

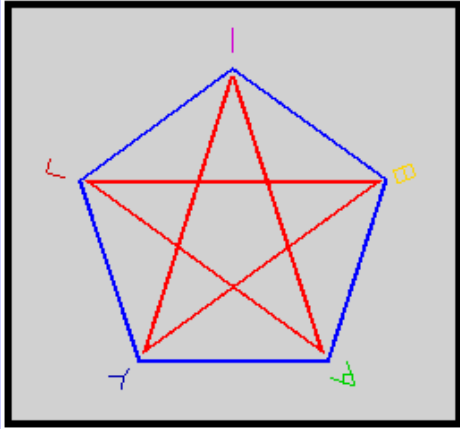
Tener la sensación de que detrás de cualquier cosa que puede ser experimentada hay algo que nuestra mente no puede aferrar y cuya belleza y sublimidad nos llegan sólo indirectamente y como un débil reflejo, esto es religiosidad. En este sentido soy religioso.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "A. Einstein", is positioned below the main text.

Multitud de páginas web en español y en inglés. Basta buscar en Google o similar Fibonacci, razón áurea, etc. O en inglés golden section, filotaxis, etc. Lo más directo, por la página

**<http://pcmap.unizar.es/~gasca/>**

Pinchando allí en **Curiosidades** se dan muchas ideas para esta y otras cuestiones.



FIN

