EXPANSIONES ASINTOTICAS DE INTEGRALES: UNIFICACION DE METODOS ASINTOTICOS †

José L. López

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain.

† Premio de la Academia a la investigación (1997 - 98)

Abstract

Se presenta una modificación del método clásico de integración término a término usado en la obtención de expansiones asintóticas de integrales. La condición de uniformidad de la expansión asintótica del integrando en la variable de integración es sustituida por una condición mucho más débil. Como se muestra en diversos ejemplos, la relajación de la condición de uniformidad hace que el método de integración término a término adquiera un mayor rango de aplicabilidad. Como consecuencia de esta generalidad, varias técnicas asintóticas clásicas se reducen a corolarios del método de integración término a término.

1. Introducción

Las soluciones de una gran variedad de problemas en mecánica de fluidos, electromagnetismo, estadística y en muchos otras disciplinas científicas admiten una representación integral que se obtiene generalmente mediante transformadas integrales. El cálculo de estas transformadas es, generalmente, bastante complicado, aunque es posible obtener aproximaciones de las mismas en ciertos límites. Ultimamente ha adquirido gran interés el estudio de expansiones asintóticas de representaciones integrales de soluciones de problemas de perturbación singular en ecuaciones en derivadas parciales [17]. Se han propuesto muchas técnicas y diversas teorías durante las últimas décadas para obtener expansiones asíntoticas de funciones definidas mediante representaciones integrales. De hecho, existen diversos libros sobre métodos y aplicaciones (véase por ejemplo [3] o [18]). También, se han escrito muchas publicaciones dedicadas a la obtención de aproximaciones asintóticas de tipos particulares de integrales (véase por ejemplo [2], [6], [7], [12], [13], [14]). En los últimos años, ha tomado especial interés el estudio de aproximaciones asintóticas uniformes (véase por ejemplo [15] y las referencias que contiene).

La literatura contiene pues una gran variedad de métodos de obtención de aproximaciones asintóticas de integrales. Algunos de los más importantes son, por ejemplo, integración por partes, lema de Watson, fase estacionaria, descenso rápido, método de Laplace, transformada de Mellin, etc.... Estas técnicas tienen un aspecto en común: son aplicables, o están adaptadas, a integrandos específicos. Por ejemplo, el lema de Watson se aplica a integrales de la forma

$$\int_0^\infty \phi(t)e^{-zt}dt, \tag{1}$$

o el método de descenso rápido se aplica a integrales de la forma

$$\int_{\mathcal{C}} g(w)e^{-zf(w)}dw, \tag{2}$$

donde z es la variable asintótica, $\mathcal{C}$ es un cierto camino en el plano complejo y $\phi(t)$, $g(w)$ y $f(w)$ deben verificar ciertas propiedades. Por otra parte, existe una técnica asintótica muy especial por su sencillez: el método de integración término a término (MITT) que, además, en principio, se aplica a integrales más generales,

$$I(z) \equiv \int_{\mathcal{C}} h(w)f(w,z)dw, \tag{3}$$

donde, para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(w)\Phi_n(z) + R_{N+1}(w,z) \qquad |z| \to \infty, \tag{4}$$

siendo $\{\Phi_n(z)\}$ es una cierta secuencia asintótica, $R_{N+1}(w,z) = \mathcal{O}(\Phi_{N+1}(z))$ y $h(w)$ y $h(w)a_n(w)$ deben ser integrables en $\mathcal{C}$. Si estas fueran todas las condiciones requeridas, este método no tendría competencia por su generalidad (casi todos los ejemplos prácticos interesantes verifican estas condiciones) y por su sencillez: basta introducir (4) en (3) e integrar término a término. Pero, para justificar que esta integración término a término es una expansión asintótica de $I(z)$, se exige otra condición más sobre el desarrollo (4): debe ser uniforme en $w \in \mathcal{C}$, es decir, el resto $R_{N+1}(w,z)$ debe estar acotado por una cantidad independiente de w (además de ser $\mathcal{O}(\Phi_{N+1}(z))$). Desafortunadamente, aunque esta última condición no restringe la forma de la integral, resulta ser una condición muy fuerte en la práctica ya que secuencias asintóticas $\{\Phi_n(z)\}$ sencillas (como por ejemplo del tipo $\{z^{-\lambda_n}\}$), generalmente no son uniformes en w, mientras que secuencias asintóticas uniformes son los suficientemente complicadas [15] como para que la integración término a término no simplifique el problema de calcular $I(z)$.

La uniformidad es una condición demasiado fuerte para justificar el MITT (representaciones integrales de muchas funciones especiales por ejemplo no verifican este requerimiento para secuencias del tipo $\{z^{-\lambda_n}\}$). Si queremos que el MITT resulte útil en la práctica, la condición de uniformidad debe ser reemplazada por alguna condición más débil. En este trabajo, presentamos una nueva versión del MITT en la que esta condición más débil es una cierta acotación del integrando que se verifica en una gran familia de integrales, ampliando considerablemente el rango de aplicación del MITT. De esta forma mantenemos la simplicidad del método a la vez que ampliamos su rango de aplicabilidad. Veremos que, por ejemplo, será aplicable a representaciones integrales de muchas funciones especiales y nos permitirá obtener nuevas aproximaciones asintóticas de ciertas funciones.

Por otra parte, desde un punto de vista teórico, esta generalización del MITT nos permitirá arrojar luz sobre la idea de unificación de métodos asintóticos. Esta idea fue ya sugerida en 1963 por Erdelyi y Wyman [5], [19]. En su trabajo, muestran que el lema de Watson, descenso rápido, el método de Darboux y fase estacionaria aplicada a una cierta familia de integrales pueden verse como casos particulares del métododo de Laplace. Aunque desde un punto de vista más moderno y siguiendo el trabajo de Wong [18], el lema de Watson e integración por partes deberían ser considerados como los 'métodos fundamentales': descenso rápido o los métodos de Laplace y Perron por ejemplo están basados en el lema de Watson, mientras que fase estacionaria o el método de sumabilidad por ejemplo están basados en integración por partes. Veremos que la generalización del MITT que aquí presentamos es aplicable a integrales cuyo integrando verifica las condiciones requeridas por el lema de Watson o por el método de integración por partes aplicado a ciertas integrales. Ello sugiere la posibilidad de considerar el MITT como la técnica asintótica 'fundamental'. Efectivamente, veremos que además del lema de Watson e integración por partes en ciertas integrales, los métodos de Laplace, Perron y descenso rápido son corolarios del MITT.

En la siguiente sección introducimos esta nueva versión del MITT. En la sección 3 obtenemos nuevas expansiones asintóticas de la función beta incompleta $B_x(a,b)$ y de ciertos coeficientes relacionados con la función de Whittaker $M_{\kappa,\mu}(z)$. En la sección 4 deducimos los métodos asintóticos mencionados anteriormente como corolarios del MITT. Un breve resumen y algunos comentarios son el contenido de la sección 5.

2. Una nueva versión del método de integración término a término

Consideremos funciones complejas $I(z)$ definidas por medio de una representación integral de la forma

$$I(z) \equiv \int_{\mathcal{C}} h(w) f(w,z) dw, \tag{5}$$

donde $h(w) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $f : \mathcal{C} \times (\mathbb{C} \setminus B(0,r_0)) \longrightarrow \mathbb{C}$, con $r_0 > 0$, verifican las dos hipótesis siguientes,

A) El producto $h(w)f(w,z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C}$ para $|z| \geq r_0 > 0$. El camino $\mathcal{C}$ puede depender de $\mathrm{Arg}(z)$ pero no de $|z|$.
B) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$ (N_0 finito o infinito),

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}} + \mathcal{O}_w(z^{-\lambda_{N+1}}), \qquad |z| \to \infty, \tag{6}$$

donde $a_n : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican $\mathrm{Re}(\lambda_{n+1}) >\mathrm{Re}(\lambda_n) > 0$ $\forall\ n \geq 0$ y $n \leq N+1$ y el subíndice w en el resto tras N términos, $\mathcal{O}_w(z^{-\lambda_{N+1}})$, significa que este resto puede depender de w.

El MITT clásico establece lo siguiente [3, pg. 29, teorema 1.7.5.] Supongamos que el resto en la expansión (6) de $f(w,z)$ puede acotarse por una cantidad independiente de w a lo largo de todo el camino $\mathcal{C}$, es decir,

$$\mathcal{O}_w(z^{-\lambda_{N+1}}) \leq \mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}}) \quad \forall\ w \in \mathcal{C}, \quad N = 0, 1, ..., N_0, \tag{7}$$

donde $\mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}})$ es independiente de w. Supongamos también que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} h(w)dw \right| < \infty \quad \text{y} \quad \left| \int_{\mathcal{C}} h(w)a_n(w)dw \right| < \infty \quad \forall\ n \leq N. \tag{8}$$

Entonces, la expansión asintótica de la integral $I(z)$ con respecto a la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$ se obtiene simplemente introduciendo la expansión (6) en (5) e intercambiando suma e integral,

$$\int_{\mathcal{C}} h(w)f(w,z)dw = \sum_{n=0}^{N} \left[\int_{\mathcal{C}} h(w)a_n(w)dw \right] \frac{1}{z^{\lambda_n}} + \mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}}), \quad |z| \to \infty. \tag{9}$$

La ventaja evidente de este procedimiento es su gran simplicidad. Pero tiene también una gran desventaja: si $f(w,z)$ y/o $\mathcal{C}$ no están acotados, en general, resulta muy complicado demostrar que el resto $\mathcal{O}_w(z^{-\lambda_{N+1}})$ está acotado por una cantidad independiente de w y que sea $\mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}})$. Esto ocurre por ejemplo cuando $f(w,z) = f(w/z)$ y $\mathcal{C}$ no está acotado. En este caso, $\mathcal{O}_w(z^{-\lambda_{N+1}}) = \mathcal{O}((w/z)^{\lambda_{N+1}})$ puede no estar acotado para valores de w arbitrarios. Dos ejemplos clásicos sencillos son los siguientes,

Ejemplo 1. *La Integral Exponencial* [18, p. 14, Eq. 4.1].

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^w}{w} dw, \qquad |\mathrm{Arg}(-z)| < \pi, \tag{10}$$

donde el camino de integración está definido por $-\infty <\mathrm{Re}(w) \leq\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(w) =\mathrm{Im}(z)$. Tras el cambio de variable $w = z - x$ obtenemos

$$\mathrm{Ei}(z) = \frac{e^z}{z} \int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} dx. \tag{11}$$

Por tanto, podemos tomar $h(x) \equiv e^{-x}$,

$$f(x,z) = f\left(\frac{x}{z}\right) \equiv \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x}{z}\right)^n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{N+1}\right) \tag{12}$$

y $a_n(x) \equiv x^n$. Esta expansión no es uniforme en $x \in [0,\infty)$ y el MITT no puede aplicarse.

Ejemplo 2. (*La función de Bessel modificada* $I_\mu(z)$). Una representación integral de $I_\mu(z)$ está dada por [1, Eq. 9.6.18],

$$I_\mu(z) = \frac{(z/2)^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\mu-1/2} e^{zt} dt, \qquad \mathrm{Re}(\mu) > -1/2. \tag{13}$$

Tras el cambio de variable $t = 1 + w/z$ y una sencilla álgebra obtenemos

$$I_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}\Gamma(\mu+1/2)} \left(e^z S_\mu(z) + i(-1)^\mu e^{-z} S_\mu(-z)\right), \tag{14}$$

donde

$$S_\mu(\pm z) = \int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(z)}} w^{\mu-1/2} e^{-w} \left(1 \mp \frac{w}{2z}\right)^{\mu-1/2} dw. \tag{15}$$

Por tanto, podemos tomar $h(w) \equiv w^{\mu-1/2} e^{-w}$,

$$\begin{aligned} f(z,w) &= f\left(\frac{w}{z}\right) \equiv \left(1 \mp \frac{w}{2z}\right)^{\mu-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(1/2-\mu)_n}{n!} \left(\frac{\pm w}{2z}\right)^n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{2z}\right)^{N+1}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$\lambda_n \equiv n$ y $a_n(w) \equiv (1/2-\mu)_n (\pm w/2)^n / n!$. Esta expansión no es uniforme en $w \in [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(z)})$ y el MITT clásico no puede aplicarse.

Otros muchos ejemplos interesantes donde el MITT no puede aplicarse lo constituyen las representaciones integrales de muchas funciones especiales [1]. El argumento es similar: son de (o pueden expresarse en) la forma

$$I(z) \equiv \int_{\mathcal{C}} h(w) f\left(\frac{w}{z}\right) dw, \tag{17}$$

donde $\mathcal{C}$ no está acotado y entonces, no se verifica la uniformidad (7) de la expansión (6). Dada su importancia, dedicaremos especial atención a integrales del tipo (17) más adelante, pero en principio, vamos a obtener la nueva versión del MITT para el caso general (5). Para demostrar que la integración término a término de la expansión (6) en (5) es una expansión asintótica de $I(z)$ en la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$, tenemos que demostrar que el resto tras N términos,

$$\epsilon_N(z) \equiv \int_{\mathcal{C}} h(w) \left[f(w,z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}\right] dw, \tag{18}$$

verifica $\epsilon_N(z) = \mathcal{O}\left(z^{-\lambda_{N+1}}\right)$. La uniformidad (7) y la primera cota en (8) lo garantizan, pero la condición (7) puede relajarse usando la siguiente observación. La hipótesis (6) significa que para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$\forall\ \delta > 1\ \exists\ r_N(w,\delta) > 0,\ \left|z^{\lambda_{N+1}}\right|\left|f(w,z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}\right| \leq \delta\,|a_{N+1}(w)| \\ \forall\ w \in \mathcal{C},\ |z| \geq r_N(w,\delta)\ \text{ y }\ |z| \geq r_0. \tag{19}$$

Por tanto, el resto en (6) está acotado, al menos para $|z| \geq r_N(w,\delta)$, por la cantidad $\delta\left|a_{N+1}(w)z^{-\lambda_{N+1}}\right|$. Pero, si existe alguna función $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verifique

$$|f(w,z)| \leq g(w) \quad \forall\ w \in \mathcal{C},\ |z| < r_N(w,\delta) \quad \text{y} \quad |z| \geq r_0, \tag{20}$$

entonces, este resto está también acotado por una cantidad $\mathcal{O}\left(z^{-\lambda_{N+1}}\right)$ para $|z| < r_N(w,\delta)$. Esto es así porque, para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$ y $\forall\ |z| \geq r_0$,

$$\left|z^{\lambda_{N+1}}\left(f(w,z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}\right)\right| \leq \left|r_N^{\lambda_{N+1}}(w,\delta)\right|\left[g(w) + \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n(w)|}{r_N^{\lambda_n}(w,\delta)}\right] \\ \forall\ w \in \mathcal{C},\ \text{y}\ |z| < r_N(w,\delta). \tag{21}$$

Juntando las desigualdades (19) y (21) obtenemos, para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$, una cota para el resto en (28) que es $\mathcal{O}\left(z^{-\lambda_{N+1}}\right)$ y uniformemente válida $\forall\ |z| \geq r_0$,

$$\left|\left(f(w,z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}\right)\right| \leq \left|z^{-\lambda_{N+1}}\right|\left[g(w) + \delta\sum_{n=0}^{N+1} \frac{|a_n(w)|}{r_N^{\lambda_n}(w,\delta)}\right] \times \\ \left|r_N^{\lambda_{N+1}}(w,\delta)\right|\ \ \forall\ w \in \mathcal{C}. \tag{22}$$

Por tanto, el resto $\epsilon_N(z)$ está acotado por la integral de $h(w)$ veces la parte derecha de la anterior desigualdad. Si esta integral es finita, entonces $\epsilon_N(z) = \mathcal{O}\left(z^{-\lambda_{N+1}}\right)$. Además, la integración término a término está bien definida gracias a la segunda cota en (8). Podemos resumir toda esta discusión en el siguiente

Teorema 1. *Consideremos la función de variable compleja $I(z)$ definida por la integral (5) y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones.*
1.i) El producto $h(w)f(w,z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C}$ para $|z| \geq r_0 > 0$. El camino $\mathcal{C}$ puede depender de Arg(z) pero no de $|z|$.
1.ii) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$ (N_0 finito o infinito),

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}} + \mathcal{O}_w\left(z^{-\lambda_{N+1}}\right), \qquad |z| \to \infty, \tag{23}$$

donde $a_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad Re$(\lambda_{n+1}) >$Re$(\lambda_n) > 0\ \forall\ n \geq 0$ y $n \leq N + 1$.

1.iii) Existe una función $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verifica

$$|f(w,z)| \le g(w) \quad \forall\ w \in \mathcal{C},\ |z| < r_{N}(w,\delta) \quad \mathrm{y} \quad |z| \ge r_0. \tag{24}$$

1.iv) Para $n = 0, 1, 2, ..., N+1$,

$$\int_{\mathcal{C}} |h(w)a_n(w)r_{N}^{\lambda_{N+1}-\lambda_n}(w)dw| < \infty \ \ \mathrm{y} \ \ \int_{\mathcal{C}} |h(w)g(w)r_{N}^{\lambda_n}(w)dw| < \infty. \tag{25}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ con respecto a la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$, para $|z| \to \infty$, está dada por

$$I(z) = \sum_{n=0}^{N} \left[\int_{\mathcal{C}} h(w)a_n(w)dw\right] \frac{1}{z^{\lambda_n}} + \epsilon_{N}(z), \tag{26}$$

donde el resto tras N términos, $\epsilon_{N}(z)$, está acotado por

$$|\epsilon_{N}(z)| \le \left|\frac{1}{z^{\lambda_{N+1}}}\right| \int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[g(w) + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \left|\frac{a_n(w)}{r_{N}^{\lambda_n}(w)}\right|\right] \left|r_{N}^{\lambda_{N+1}}(w,\delta)dw\right| \tag{27}$$

y δ y $r_{N}(w,\delta)$ se obtienen de (19).

Observación. La verificación de las condiciones 1.iii) y 1.iv) del teorema 1 puede depender de $\mathrm{Arg}(z)$, hecho que determina los rayos de Stokes.

La principal diferencia entre esta versión y el MITT clásico radica en la sustitución de la condición de uniformidad (7) por la condición 1.iii) mucho menos restrictiva. Pero, si no resulta sencillo obtener $r_{N}(w,\delta)$ de la ec. (19), entonces la condición 1.iii) no puede chequearse fácilmente en la práctica. De todas formas, para el caso especial en que la función f del integrando depende de w y z a través de su cociente, es decir, la integral (5) es de la forma (17), las condiciones 1.iii) y 1.iv) son más fáciles de chequear. Para este tipo especial de integrales (muy frecuentes en la práctica por otra parte), la hipótesis B) se escribe

$$f\left(\frac{w}{z}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_{N+1}}\right), \quad |z| \to \infty, \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

Entonces, la propiedad (19) se reduce a: para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$\forall\ \delta > 1\ \exists\ r_{N}(\delta) > 0,\ \left|z^{\lambda_{N+1}}\right| \left|f\left(\frac{w}{z}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n}\right| \le \delta \left|a_{N+1}w^{\lambda_{N+1}}\right|$$
$$\forall\ w \in \mathcal{C},\ |z| \ge r_{N}|w|\ \mathrm{y}\ |z| \ge r_0. \tag{29}$$

y tenemos el siguiente

Teorema 2. *Consideremos la función de variable compleja $I(z)$ definida por la integral (17) y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones.*

2.i) El producto $h(w)f(w/z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C}$ para $|z| \geq r_0 > 0$. El camino $\mathcal{C}$ puede depender de Arg(z) pero no de $|z|$.
2.ii) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$ (N_0 finito o infinito),

$$f\left(\frac{w}{z}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_{N+1}}\right), \qquad |z| \to \infty, \tag{30}$$

donde $a_n \in \mathcal{C}$ y $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad Re$(\lambda_{n+1}) >$Re$(\lambda_n) > 0 \ \forall \ n \geq 0$ y $n \leq N+1$.
2.iii) Existe una función $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verifica

$$\left|f\left(\frac{w}{z}\right)\right| \leq g(w) \quad \forall \ w \in \mathcal{C}, \ |z| < r_N|w| \quad \text{y} \quad |z| \geq r_0. \tag{31}$$

2.iv) Para $n = 0, 1, 2, ..., N+1$,

$$\int_{\mathcal{C}} |h(w)w^{\lambda_n} dw| < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{C}} |h(w)g(w)w^{\lambda_n} dw| < \infty. \tag{32}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ con respecto a la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$, para $|z| \to \infty$, está dada por

$$I(z) = \sum_{n=0}^{N} \left[\int_{\mathcal{C}} h(w)w^{\lambda_n} dw\right] \frac{a_n}{z^{\lambda_n}} + \epsilon_N(z), \tag{33}$$

donde el resto tras N términos, $\epsilon_N(z)$, está acotado por

$$|\epsilon_N(z)| \leq \left|\left(\frac{r_N}{z}\right)^{\lambda_{N+1}}\right| \int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[g(w) + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \left|\frac{a_n}{r_N^{\lambda_n}}\right|\right] \left|w^{\lambda_{N+1}}\right| dw \tag{34}$$

y δ y $r_N(\delta)$ están definidos en (29).
Dem. Basta particularizar la demostración del teorema 1 al caso en que $a_n(w) \equiv a_n w^{\lambda_n}$ y $r_N(w, \delta) \equiv r_N(\delta)|w|$. □

Vemos pues que si $f(w, z) = f(w/z)$, la forma de $r_N(w, \delta)$ es más simple y las condiciones 2.iii) y 2.iv) son más sencillas de chequear que las condiciones 1.iii) y 1.iv) respectivamente. Pero todavia, si no resulta sencillo obtener $r_N(\delta)$ de la propiedad (29), entoces la condición 2.iii) no puede chequearse fácilmente. De todas formas, en la práctica, la desigualdad $|f(w/z)| \leq g(w)$ suele satisfacerse $\forall \ |z| \geq r_0$ y entonces, no es necesario conocer el valor explícito de $r_N(\delta)$ para verificar la condición 2.iii), tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 (continuación). Para cualquier $r_0 > 0$ tenemos

$$\left|f\left(\frac{x}{z}\right)\right| \equiv \left|1 - \frac{x}{z}\right|^{-1} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathrm{Arg}(z)| \geq \pi/2 \\ |\mathrm{sen}(\mathrm{Arg}(z))|^{-1} & \text{si } 0 < |\mathrm{Arg}(z)| \leq \pi/2 \end{cases} \tag{35}$$

y entonces, las condición 2.iii) del teorema 2 se satisface con $g(x) \equiv h(\text{Arg}(z))$, donde hemos representado por $h(\text{Arg}(z))$ el segundo miembro de la desigualdad anterior. El resto de las condiciones se satisfacen trivialmente con $\mathcal{C} = [0, \infty)$, $a_n = 1$ y $\lambda_n = n$. Aplicando el teorema 2 y tras una simple álgebra obtenemos el resultado bien conocido [18, p. 14, Eq. 4.3]

$$\text{Ei}(z) \sim \frac{e^z}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z^n}, \qquad \text{Arg}(z) \neq 0. \tag{36}$$

Ejemplo 2 (Continuación). Para cualquier $r_0 > 0$ y $\text{Re}(\mu) \geq 1/2$ tenemos que

$$\left| f\left(\frac{w}{z}\right) \right| \equiv \left| \left(1 \mp \frac{w}{2z}\right)^{\mu - 1/2} \right| \leq \left(1 + \frac{|w|}{2r_0}\right)^{\text{Re}(\mu) - 1/2} \equiv g(w) \tag{37}$$

y se satisface la condición 2.iii) del teorema 2. El resto de condiciones se satisfacen trivialmente con $\mathcal{C} = [0, \infty e^{i\text{Arg}(z)})$, $a_n = (1/2 - \mu)_n / ((\pm 2)^n n!)$ y $\lambda_n = n$. Aplicando este corolario y tras operaciones sencillas obtenemos el conocido resultado [1, Eq. 9.7.1],

$$I_\mu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2 + \mu)_n (1/2 - \mu)_n}{n! (2z)^n} + \mathcal{O}(e^{-z}), \quad \text{Re}(z) > 0. \tag{38}$$

Por tanto, el rayo de Stokes es el eje imaginario, determinado por la verificación de las condiciones de integrabilidad 2.iv).

De todas formas, la cota (27) (resp. (34)) para el resto no resulta práctica a menos que se conozca $r_N(w, \delta)$ (resp. $r_N(\delta)$). Este problema desaparece si la expansión (23) (resp. (30)) es convergente en alguna región $|z| \geq r(w) > 0$. Más aún, si (23) (resp. (30)) es convergente en esta región, entonces la constante r puede usarse como $r_N(w, \delta)$ en (24) (resp. $r_N(\delta)$ en (31)) para verificar la condición 1.iii) (resp. 2.iii)). Aclaremos este punto en los dos siguientes teoremas

Teorema 3. *Consideremos la función de variable compleja $I(z)$ definida por la integral (5) y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones.*

3.i) El producto $h(w)f(w, z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C}$ para $|z| \geq r_0 > 0$. El camino $\mathcal{C}$ puede depender de Arg(z) pero no de $|z|$.

3.ii) La función $f(w, z)$ tiene una expansión en serie de potencias convergente en $|z| \geq r(w) > 0$,

$$f(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}, \qquad |z| \geq r(w), \tag{39}$$

donde $a_n : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad Re(λ_{n+1}) >Re$(\lambda_n) > 0$ $\forall\ n \geq 0$ y $n \leq N + 1$ y $r : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ es mayor que el inverso del radio de convergencia de la serie anterior.

3.iii) Existe una función $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica

$$|f(w, z)| \leq g(w) \quad \forall\ w \in \mathcal{C},\ |z| < r(w) \quad \text{y} \quad |z| \geq r_0. \tag{40}$$

3.iv) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$\int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n(w)}{r^{\lambda_n}(w)} \right| + g(w) \right] \left| r^{\lambda_N}(w) dw \right| < \infty, \tag{41}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ con respecto a la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$, para $|z| \to \infty$, está dada por (26), donde el resto tras N términos, $\epsilon_N(z)$, está acotado por

$$|\epsilon_N(z)| \leq \frac{1}{|z^{\lambda_{N+1}}|} \int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[g(w) + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n(w)}{r^{\lambda_n}(w)} \right| \right] \left| r^{\lambda_{N+1}}(w) \right| |dw| \tag{42}$$

Dem. La hipótesis 3.ii) implica

$$\begin{aligned} \left| z^{\lambda_{N+1}} \right| \left| f(w,z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}} \right| \leq \quad & \left| r^{\lambda_{N+1}}(w) \right| \times \\ & \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{a_n(w)}{r^{\lambda_n}(w)} \right| \quad \forall \; w \in \mathcal{C}, \;\; |z| \geq r(w). \end{aligned} \tag{43}$$

Y la condición 3.iii) implica

$$\begin{aligned} \left| z^{\lambda_{N+1}} \right| |f(w,z) \; - \; \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}} \Bigg| \leq & \left| r^{\lambda_{N+1}}(w) \right| \times \\ & \left[g(w) + \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{a_n(w)}{r^{\lambda_n}(w)} \right| \right] \quad \forall \; w \in \mathcal{C}, \;\; |z| < r(w). \end{aligned} \tag{44}$$

Entonces, la cota (42) se deduce fácilmente usando las desigualdades (43) y (44) y la definición del resto (18). Esta cota es finita según la condición 3.iv). Por tanto, $\epsilon_N(z) = \mathcal{O}(z^{-\lambda_N})$ y la ec. (26) es la expansión asintótica de $I(z)$ en la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$. $\square$

En el caso especial de las integrales del tipo (17), el teorema anterior se simplifica,

Teorema 4. *Consideremos la función de variable compleja $I(z)$ definida por la integral (17) y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones.*
4.i) El producto $h(w)f(w/z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C}$ para $|z| \geq r_0 > 0$. El camino $\mathcal{C}$ puede depender de Arg(z) pero no de $|z|$.
4.ii) La función $f(t)$ tiene una expansión en serie de potencias convergente en $|t| \leq r^{-1}$, $r > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\lambda_n}, \qquad |t| \leq r^{-1}, \tag{45}$$

para algún $r > 0$, donde $a_n \in \mathbb{C}$ y $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad Re$(\lambda_{n+1}) >$Re$(\lambda_n) > 0$ $\forall$ $n \geq 0$ y $n \leq N+1$.
4.iii) Existe una función $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verifica

$$\left| f\left(\frac{w}{z}\right) \right| \leq g(w) \quad \forall \; w \in \mathcal{C}, \;\; |z| < r|w| \quad \text{y} \quad |z| \geq r_0. \tag{46}$$

4.iv) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$\int_{\mathcal{C}} |h(w)a_n(w)r_N^{\lambda_{N+1}-\lambda_n}(w)dw| < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{C}} |h(w)g(w)r_N^{\lambda_n}(w)dw| < \infty. \tag{47}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ en la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$ está dada por (33) y una cota de error para el resto está dada por

$$|\epsilon_N(z)| \le \left|\left(\frac{r}{z}\right)^{\lambda_{N+1}}\right| \int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[g(w) + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{r^{\lambda_n}}\right|\right] \left|w^{\lambda_{N+1}}\right| |dw| \tag{48}$$

Dem. Como la del teorema anterior con $a_n(w) \equiv a_n w^{\lambda_n}$ y $r(w) \equiv r|w|$. □

Ejemplo 1 (Continuacion). La expansión (12) es de hecho convergente para $|z|/x \ge (N+2)/(N+1)$,

$$f(t) \equiv (1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \qquad |t| \le \frac{N+1}{N+2}. \tag{49}$$

Por tanto, usando el teorema 4 con $r \equiv (N+2)/(N+1)$, una cota para el resto tras N términos está dada por

$$\epsilon_N(z) \le (h(\mathrm{Arg}(z)) + N + 2)e^{\mathrm{Re}(z)+1}\frac{(N+1)!}{|z|^{N+2}}. \tag{50}$$

Ejemplo 2 (Continuación). La expansión (16) es convergente en la región definida por $|z|/|w| \ge (N+2)/(2(N+1))$,

$$f\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \left(1 \mp \frac{w}{2z}\right)^{\mu-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2-\mu)_n}{n!}\left(\frac{\pm w}{2z}\right)^n. \tag{51}$$

Por tanto, usando el teorema 4 con $r \equiv (N+2)/(2(N+1))$, una cota para el resto tras N términos está dada (para $\mu = 1$ por simplicidad) por

$$\epsilon_N(z) \le \frac{\Gamma(N+7/2)e^{\mathrm{Re}(z)+1}}{(2\mathrm{Re}(z))^{N+3/2}(\cos(\mathrm{Arg}(z)))}\left[N + 3 + \frac{1}{2\mathrm{Re}(z)}\right]. \tag{52}$$

Expansiones asintóticas de representaciones integrales de muchas otras funciones especiales [1] se han obtenido usando diversos métodos asintóticos. Estas podrían obtenerse de una manera sistemática y sencilla usando esta versión modificada del MITT. El procedimiento sería similar al que hemos usado en los ejemplos anteriores.

Por otra parte, en los métodos clásicos que estudiaremos en los corolarios 1, 6 y 7 de la sección 4, el camino $\mathcal{C}$ es una recta que une el origen con un punto Tz, con $T \in \mathbb{C}$. Por tanto, el camino $\mathcal{C}$ depende de $|z|$ y la teoría anterior no se aplica. Pero podría aplicarse tras una ligera modificación si la integral puede extenderse hasta el infinito, es decir, puede definirse a lo largo de la recta $(zT, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)})$ y la contribución de este trozo puede despreciarse. Dado que en la sección 4 vamos ha necesitar únicamente integrales de la forma general (5) donde la expansión (6) sea convergente o integrales de la forma especial (17) donde la expansión (28) sea sólo asintótica, consideraremos únicamente estas dos posibilidades. Cada una de ellas se estudia respectivamente en cada uno de los dos siguientes teoremas.

Teorema 5. *Supongamos que la función de variable compleja $I(z)$ definida por*

$$I(z) \equiv \int_0^{zT} h(w) f\left(\frac{w}{z}\right) dw, \tag{53}$$

verifica:

5.i) El producto $h(w)f(w/z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)})$ para $|z| \geq r_0 > 0$.

5.ii) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$ (N_0 finito o infinito),

$$f\left(\frac{w}{z}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_{N+1}}\right), \qquad |z| \to \infty, \tag{54}$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad Re$(\lambda_{n+1}) >$Re$(\lambda_n) > 0$ $\forall$ $n \geq 0$ y $n \leq N+1$.

5.iii) Existe una función $g : [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}) \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verfica

$$\left|f\left(\frac{w}{z}\right)\right| \leq g(w) \quad \forall \ w \in [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}), \ \ |z| r_{N}^{-1} \leq |w| \leq |zT|, \tag{55}$$

donde r_N está definida en (19).

5.iv) Para $n = 0, 1, 2, ..., N+1$,

$$\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} |h(w) w^{\lambda_n} dw| < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} |h(w) g(w) w^{\lambda_n} dw| < \infty. \tag{56}$$

5.v) Para cualquier $n \geq 0$,

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| z^{\lambda_m} \int_{zT}^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w) w^{\lambda_n} dw \right| = 0 \quad \forall \ m > 0. \tag{57}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ para $|z| \to \infty$ está dada por

$$I(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w) w^{\lambda_n} dw\right] \frac{a_n}{z^{\lambda_n}}. \tag{58}$$

Dem. Los coeficientes de la expansión anterior están bien definidos por 5.iv). Por otra parte, podemos escribir (53) de la forma

$$I(z) = \sum_{n=0}^{N} \left[\int_0^{zT} h(w) w^{\lambda_n} dw\right] \frac{a_n}{z^{\lambda_n}} + \epsilon_N(zT), \tag{59}$$

donde

$$\epsilon_N(zT) \equiv \int_0^{zT} h(w) \left(f\left(\frac{w}{z}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} \right) dw. \tag{60}$$

Pero la condición 5.v) significa que $\forall\ m > 0$,

$$\int_0^{zT} h(w) w^{\lambda_n} dw = \int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w) w^{\lambda_n} dw + \mathcal{O}(z^{-\lambda_m}) \tag{61}$$

y entonces, los coeficientes de la suma en (59) son justamente los coeficientes de la expansión (58) excepto por cantidades $\mathcal{O}(z^{-\lambda_m})\ \forall\ m > 0$. Por tanto, sólo queda por demostrar que el resto $\epsilon_N(zT)$, definido en (60) es una cantidad $\mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}})$. Por una parte, puede escribirse

$$\epsilon_N(zT) = \int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w) \theta\left(1 - \frac{w}{zT}\right) \left(f\left(\frac{w}{z}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda} \right) dw, \tag{62}$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón. Por otra parte, la condición 5.ii) significa que se satisface (29) y usando la condición 5.iii), tenemos que

$$\theta\left(1 - \frac{w}{zT}\right) \left| f\left(\frac{w}{z}\right) \right| \leq g(w) \quad \forall\ w \in [0, \infty, e^{i\mathrm{Arg}(zT)}),\ \ |z| \leq r_N |w|. \tag{63}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| z^{\lambda_{N+1}} \theta\left(1 - \frac{w}{zT}\right) \left(f\left(\frac{w}{z}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} \right) \right| \leq \left| (r_N w)^{\lambda_{N+1}} \right| [g(w) + \\ \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{a_n}{r_N^{\lambda_n}} \right| \Big] \ \forall\ w \in [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}),\ \ |z| \leq r_N |w| \ \text{ y } \ |z| \geq r_0. \end{aligned} \tag{64}$$

Por tanto, uniendo (29) y (64) tenemos, $\forall\ |z| \geq r_0$,

$$\begin{aligned} \left| z^{\lambda_{N+1}} \quad \theta\left(1 - \frac{w}{zT}\right) \left(f(z, w) - \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{w}{z}\right)^{\lambda_n} \right) \right| \leq \Big[g(w) \\ + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \left| \frac{a_n}{r_N^{\lambda_n}} \right| \Big] \left| (r_N w)^{\lambda_{N+1}} \right| \quad \forall\ w \in [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}). \end{aligned} \tag{65}$$

Usando la condición 5.iv), la desigualdad (65) y la definición (60), tenemos que $\epsilon_N(zT) = \mathcal{O}(z^{-\lambda_{N+1}})$ y concluye la demostración. □

Teorema 6. *Supongamos que la función de variable compleja $I(z)$ definida por*

$$I(z) \equiv \int_0^{zT} h(w) f(w, z)\, dw, \tag{66}$$

verifica:

6.i) El producto $h(w)f(w,z)$ es integrable a lo largo del camino $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)})$ para $|z| \geq r_0 > 0$.

6.ii) La función $f(w,z)$ tiene una expansión en serie de potencias convergente en $|z| \geq r(w) > 0$,

$$f\left(w,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(w)}{z^{\lambda_n}}, \qquad |z|\geq r(w), \tag{67}$$

donde $a_n : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}$ es una secuencia de números complejos que verifican la propiedad $Re(\lambda_{n+1}) > Re(\lambda_n) > 0$ $\forall$ $n \geq 0$ y $n \leq N+1$ y $r : \mathcal{C} \to \mathrm{R}^+ \setminus \{0\}$ es mayor que el inverso del radio de convergencia de la serie anterior.

6.iii) Existe una función $g : [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}) \longrightarrow \mathrm{R}^+$ que verifica

$$\left|f\left(\frac{w}{z}\right)\right| \leq g(w) \quad \forall\ w \in [0, zT),\ \ |z| \leq r(w),\ \ |z| \geq r_0. \tag{68}$$

6.iv) Para $N = 0, 1, 2, ..., N_0$,

$$\int_{\mathcal{C}} |h(w)| \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_n(w)}{r^{\lambda_n}(w)}\right| + g(w)\right] \left|r^{\lambda_N}(w)dw\right| < \infty, \tag{69}$$

6.v) para cualquier $n \geq 0$,

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|z^{\lambda_m}\int_{zT}^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w)a_n(w)dw\right| = 0 \quad \forall\ m \geq 0. \tag{70}$$

Entonces, la expansión asintótica de $I(z)$ para $|z| \to \infty$ está dada por

$$I(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w)a_n(w)dw\right]\frac{1}{z^{\lambda_n}}. \tag{71}$$

Dem. Es similar a la del teorema 5, pero usando la propiedad (19) en lugar de la propiedad (29) y $r(w,\delta)$ en lugar de $r_N(\delta)|w|$. □

3. Ejemplos no triviales

La sustitución de la condición de uniformidad (7) por la condición iii) de cualquiera de los teoremas de la sección 2, mucho menos restrictiva, hace que el MITT adquiera un mayor rango de aplicabilidad. Además, dada su trivial implementación, permite obtener expansiones asintóticas de integrales más o menos sofisticadas. En esta sección obtenemos, usando el teorema 4, la expansion asintótica de la función Beta incompleta $B_x(a,b)$ en la secuencia $\{a^{-n}\}$. En el ejemplo 4, el teorema 4 nos permitirá obtener una aproximación asintótica de los coeficientes de la expansión de la función de Whittaker $M_{\kappa,\mu}(z)$ en serie de potencias de κ a partir de una representación integral complicada.

Ejemplo 3. *La función Beta incompleta $B_x(a,b)$.* Una representación integral de $B_x(a,b)$ está dada por [16, p. 128],

$$B_x(a,b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy, \qquad a > 0,\ \ b > 0,\ \ 0 \leq x \leq 1. \tag{72}$$

Con el cambio de variable $y = xe^{-t/a}$ obtenemos

$$B_x(a,b) = \frac{x^a}{a}\int_0^\infty e^{-t}(1-xe^{-t/a})^{b-1}dt, \tag{73}$$

Por tanto, tenemos $\mathcal{C} \equiv [0,\infty)$, $h(t) \equiv e^{-t}$ y $f(t/a) \equiv (1-xe^{-t/a})^{b-1}$. La expansión asintótica de $f(t/a)$ con respecto a la secuencia $(t/a)^n$ es su expansión de Taylor en torno a 0,

$$f\left(\frac{t}{a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{t}{a}\right)^n, \tag{74}$$

Tras una cierta álgebra obtenemos que esta expansión está dada por

$$f^{(n)}(0) = (1-x)^{b-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n(1-b)_k\alpha_{n,k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k, \tag{75}$$

donde los coeficientes $\alpha_{n,k}$ son universales y están definidos recurrentemente mediante

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1, \quad \alpha_{n,k} = 0 \text{ for } k<0 \text{ o } k>n, \\ \alpha_{n,k} &= \alpha_{n-1,k-1} + k\alpha_{n-1,k}, \text{ for } 0 \le k \le n. \end{aligned} \tag{76}$$

Usando la representación de Cauchy de $f^{(n)}(0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le e^{2\pi|\mathrm{Im}(b)|}\left[\left(1+x^{1-1/\delta}\right)^{\mathrm{Re}(b-1)} + \right. \\ &\quad \left.\left(1-x^{1+1/\delta}\right)^{\mathrm{Re}(b-1)}\right]\left(\frac{-\delta}{\log x}\right)^n, \quad \delta > 1. \end{aligned} \tag{77}$$

Por tanto, la expansión (74) es convergente para $t/a \le (-\log x)/\delta$. Para aplicar el teorema 4, podemos tomar $r \equiv (-\log x)/\delta$. La función $f(t/a)$ verifica las hipótesis 4.i) y 4.ii) con $a_n \equiv f^{(n)}(0)/n!$ y $\lambda_n \equiv n$. Por otra parte, $\forall\ t \in [0,\infty)$, tenemos que $f(t/a)$ verifica la condición 4.iii) $\forall\ a > 0$ con

$$g(t) \equiv 1 + (1-x)^{b-1}, \tag{78}$$

donde $g(t)$ y $h(t)$ satisfacen 4.iv). Por tanto, podemos aplicar el teorema 4 y tras unos sencillos cálculos obtenemos

$$B_x(a,b) \sim \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}(1-b)_k\alpha_{n,k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\right]\frac{1}{a^n}. \tag{79}$$

Una cota para el resto tras N términos puede obtenerse mediante la fórmula (48). Esta expansión en la secuencia $\{a^{-n}\}$ podría 'añadirse' a lista de expansiones de la función Beta incompleta (ver por ejemplo [4], [9], [14] y [16, sec. 11.3]).

Ejemplo 4. Los coeficientes de la expansión de la función de Whittaker $M_{\kappa,\mu}(z)$ en serie de potencias de κ,

$$M_{\kappa,\mu}(z) = 2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)z^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty} F_m^{(\mu)}(z)\frac{(-\kappa)^m}{m!} \tag{80}$$

están dados por [8],

$$F_m^{(\mu)}(z) = \frac{e^{z/2}\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi z}} \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right) (\ln z)^{m-k}\, I_k^{(\mu)}(z), \tag{81}$$

donde las funciones $I_k^{(\mu)}(z)$ están definidas mediante la representación integral

$$I_k^{(\mu)}(z) = 2^{2\mu}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} e^{w/2}w^{-(2\mu+1)}\frac{d^k}{d\mu^k}\left(\left(\frac{w}{2}\right)^{\mu+1/2} f\left(\frac{w}{z}\right)\right) dw, \tag{82}$$

$$f\left(\frac{w}{z}\right) \equiv \left(1+\frac{w}{2z}\right)^{-(\mu+1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{w}{2z}\right)^n, \quad |w|<|2z|, \tag{83}$$

y el contorno $\mathcal{C}$ comienza en $-\infty$ en el eje real, rodea los puntos 0 y $-2z$ en el sentido contrario a las agujas del reloj y regresa al punto de partida. Para usar el teorema 4 debemos tomar $h(w) \equiv e^{w/2}w^{-(2\mu+1)}\frac{d^k}{d\mu^k}\left(\left(\frac{w}{2}\right)^{\mu+1/2}\cdot\right)$, $a_n \equiv (\mu+1/2)_n/((-2)^n n!)$, $\lambda_n \equiv n$ y $r \equiv 1$. Tras una cierta álgebra encontramos que la función $g(w)$ puede tomarse

$$g(w) = e^{\mathrm{Re}(w)/2}\left|\frac{w^N}{(2w)^{\mu+1/2}}\right| \sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array}\right)\left|\ln\frac{w}{2}\right|^{k-l} g_l(w), \tag{84}$$

donde

$$\begin{aligned} g_l(w) = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\left|\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu+\tfrac{1}{2})_n\right| + e^{2|\mathrm{Im}(\mu)|\pi}|2w|^{\mathrm{Re}(\mu)+l+1} + \\ \sum_{n=0}^{N}\frac{|w|^n}{n!}\left|\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu+\tfrac{1}{2})_n\right|, \end{aligned} \tag{85}$$

siempre y cuando el camino $\mathcal{C}$ es tal que sus puntos w satisfacen $|w|>1$ y $|w+2z|\geq 1$.

Entonces, usando el teorema 4 y tras operaciones estándar obtenemos que la expansión asintótica de la función $I_k^{(\mu)}(z)$ en la secuencia $\{z^{-n}\}$ es

$$I_k^{(\mu)}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right)\left(\frac{d^j(\mu+\frac{1}{2})_n}{d(-\mu)^j}\right)\frac{d^{k-j}}{d\mu^{k-j}}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})}\right)\right]\frac{(-1)^n}{n!z^n}. \tag{86}$$

Introduciendo esta expansión en (81) obtenemos una expansión $F_m^{(\mu)}(z)$. Este resultado puede chequearse sustituyendo ahora (81) en (80), agrupando potencias de $\log(z)$ y reordenando las sumas. Obtenemos de esta manera la conocida expansión asintótica de la función de Whittaker en la secuencia $\{z^{-n}\}$ [1, ec. 13.5.1.].

4. Corolarios del método de integración término a término.

Como hemos visto en los teoremas anteriores, el MITT no requiere que el integrando tenga una forma muy especial, tan sólo la acotación 1.iii) y la condición de integrabilidad 1.iv) (o las correspondientes condiciones en el resto de teoremas). Por otra parte, el resto de técnicas asintóticas mencionadas en la introducción están adaptadas a integrandos particulares. Por tanto, si esos integrandos verifican las condiciones del teorema 1 (o del resto de teoremas de la sección 2 deducidos del teorema 1), el MITT resultará ser un método más general. En esta sección demostramos que, efectivamente, el lema de Watson, integración por partes aplicado a transformadas de Laplace y una cierta familia de transformadas de Fourier y los método de Laplace, descenso rápido y Perron son corolarios del MITT.

Corolario 1. (*Lema de Watson* [10 *p.* 113]*). Supongamos que $I(z)$ está definida por la integral*

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-zt} q(t) dt, \tag{87}$$

donde

1.a) $q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene un número finito de discontinuidades e infinitos en el eje real positivo.

1.b) Cuando $t \to 0^+$,

$$q(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{(n+a-b)/b}, \tag{88}$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$, $b > 0$ y $Re(a) > 0$.

1.c) La integral (87) tiene abcisa de convergencia $\xi \equiv r_0 cos(Arg(z)) > 0$ (es integrable para $|z| \geq r_0 > 0$ y $|Arg(z)| < \pi/2$).

Entonces, para $|z| \to \infty$ y $|Arg(z)| < \pi/2$,

$$I(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+a}{b}\right) \frac{a_n}{z^{(n+a)/b}}. \tag{89}$$

Más aún, se trata de una expansión fuertemente asintótica de $I(z)$,

$$\begin{aligned} |\epsilon_N(z)| \leq \left| r_N^{(N+a+1)/b} \right| \frac{e^{-\mathrm{Im}(a)\mathrm{Arg}(z)/b}}{\left| z^{(N+a+1)/b} \right|} \left[\frac{K}{r_0} + \right. \\ \left. \delta \sum_{n=0}^{N+1} \left| \frac{a_n}{r_N^{(n+a)/b}} \right| \right] \frac{\Gamma((N+\mathrm{Re}(a)+1)/b+1)}{(\cos(\mathrm{Arg}(z))^{(N+\mathrm{Re}(a)+1)/b+1}}, \end{aligned} \tag{90}$$

donde $K > 0$ es una cota de $|q(t)|$ en un cierto intervalo que se define más adelante.

Dem. Para $T > 0$ escribimos

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^T e^{-zt} q(t) dt + \int_T^\infty e^{-zt} q(t) dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^{zT} e^{-w} q\left(\frac{w}{z}\right) dw + e^{-zT} \int_0^\infty e^{-zt} q\left(t+T\right) dt. \end{aligned} \tag{91}$$

Pero usando condición 1.c), la segunda integral en la última línea verifica

$$\left| \int_0^\infty e^{-zt} q\left(t+T\right) dt \right| \leq \int_{-T}^\infty \left| e^{-\xi t} q\left(t+T\right) \right| dt$$

$$\leq \quad e^{\xi T}\int_0^\infty \left|e^{-\xi t}q\left(t\right)\right|dt<\infty \tag{92}$$

y por tanto,

$$I(z)=\frac{1}{z}\int_0^{zT}e^{-w}q\left(\frac{w}{z}\right)dw+\mathcal{O}(e^{-zT}). \tag{93}$$

Ahora vamos a demostrar que las condiciones 1.a), 1.b) y 1.c) implican las condiciones del teorema 5 para la integral en la ecuación anterior. Por tanto, debemos tomar $h(w)\equiv e^{-w}/w$ y $f(w/z)\equiv(w/z)q(w/z)$.

Usando la condición 1.c), esta integral es finita para $|z|\geq r_0$ y entonces, la hipótesis 5.i) del teorema 5 se satisface con $\mathcal{C}\equiv[0,\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)})$. La condición 1.b) implica

$$\frac{w}{z}q\left(\frac{w}{z}\right)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{w}{z}\right)^{(n+a)/b} \tag{94}$$

y entonces, la hipótesis 5.ii) también se satisface con $\lambda_n=(n+a)/b$. Usando la condición 1.a), podemos elegir T tal que $0<T<$ la primera singularidad de $q(t)$ aparte de una eventual singularidad en $t=0$. Por tanto,

$$\forall\ r_{\scriptscriptstyle N}^{-1}>0,\quad \exists\ K>0,\quad \left|q\left(\frac{w}{z}\right)\right|\leq K\quad \text{para}\quad r_{\scriptscriptstyle N}^{-1}\leq\frac{w}{z}\leq T \tag{95}$$

y la condición 5.iii) se satisface con $g(w)\equiv K|w|/r_0$. La condicion 5.iv) se satisface trivialmente. Por otra parte, para verificar la condición 5.v), debemos considerar

$$\int_{zT}^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}}e^{-w}w^{(n+a)/b-1}dw=M_n(z)e^{-zT}, \tag{96}$$

donde

$$M_n(z)\equiv\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}}e^{-w}(w+zT)^{(n+a)/b-1}dw. \tag{97}$$

Una cota para el módulo del integrando puede ser

$$\left|(w+zT)^{(n+a)/b-1}\right|\leq e^{2\pi|\mathrm{Im}(a/b)|}(|w|+T|z|)^{I_n}, \tag{98}$$

donde $I_n\equiv\mathrm{Int}(\mathrm{Re}((n+a)/b))$ y hemos elegido $T\geq r_0^{-1}$. Usando (98) y tras simples operaciones encontramos que $|M_n(z)|$ está acotado por una cantidad $\mathcal{O}(z^{I_n})$. Por tanto,

$$\int_{zT}^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}}e^{-w}w^{(n+a)/b-1}dw=\mathcal{O}(e^{-zT}), \tag{99}$$

verificándose la condición 5.v). Entonces, podemos aplicar el teorema 5 y obtenemos (58), donde las integrales dentro de los corchetes son precisamente $\Gamma((n+a)/b)$, obteniendo (89). □

Corolario 2. (*Integración por partes en transformadas de Laplace* [3 *p.* 78]*). Supongamos que* $I(z)$ *está definida por la integral*

$$I(z)=\int_a^b e^{-zt}q(t)dt, \tag{100}$$

donde $0 \leq a < b \leq \infty$*,* $Re(z) \geq r_0 > 0$ *y* $q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *tiene hasta* N *derivadas contínuas en* $[a,b]$*, donde* $[a,b]$ *debe entenderse* $[a,\infty)$ *si* $b = \infty$*.*
Entonces, para $|z| \to \infty$*,*

$$I(z) = \frac{e^{-az}}{z}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(a)}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-(N+1)})\right] - \frac{e^{-bz}}{z}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(b)}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-(N+1)})\right] \text{ si } b < \infty, \tag{101}$$

$$I(z) = \frac{e^{-az}}{z}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(a)}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-(N+1)})\right] \text{ si } b = \infty \tag{102}$$

y el resto $\epsilon_N(z)$ *está acotado por*

$$|\epsilon_N(z)| \leq \left|\left(\frac{r_N}{z}\right)^{N+1}\right| \left[\left(\epsilon_1 K + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \frac{|q^{(n)}(a)|}{n! r_N^n}\right)\left|e^{-az}\right| + \epsilon_2\left(K + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \frac{|q^{(n)}(b)|}{n! r_N^n}\right)\left|e^{-bz}\right|\right] \frac{(N+1)!}{(\cos(\operatorname{Arg}(z)))^{N+2}}, \tag{103}$$

donde $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ *y* $K \geq 1$ *es una cota para* $|q(t)|$ *en* $[a,b]$ *si* $b < \infty$ *y* $\epsilon_1 = 2^{N+2}$*,* $\epsilon_2 = 0$ *y* $K \geq 1$ *es una cota para* $|e^{-zt}q(t)|$ *en* $[a,\infty)$ *si* $b = \infty$*.*

Dem. Consideremos primero el caso $b < \infty$. Extendemos la función $q(t)$ a una función $C^{N)}([a,\infty))$ haciendo $q(t) \equiv 0$ en un entorno de ∞. La extensión explícita de $q(t)$ a $[b,\infty)$ no es necesaria, aunque una posible construcción podemos encontrarla por ejemplo en [11, p. 418, Ej. 11 y 12]. Entonces,

$$I(z) = \int_a^\infty e^{-zt} q(t) dt - \int_b^\infty e^{-zt} q(t) dt \tag{104}$$

y con el cambio de variable $t = a + w/z$ y $t = b + w/z$ en cada una de las respectivas integrales en el lado derecho de esta ecuación,

$$I(z) = \frac{e^{-az}}{z}\int_0^{\infty \exp(i\operatorname{Arg}(z))} e^{-w} q\left(\frac{w}{z} + a\right) dw - \frac{e^{-bz}}{z}\int_0^{\infty \exp(i\operatorname{Arg}(z))} e^{-w} q\left(\frac{w}{z} + b\right) dw. \tag{105}$$

Pero si usamos que $q(t)$ tiene N derivadas contínuas en el intervalo $[a,b]$,

$$q\left(\frac{w}{z} + t\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(t)}{n!}\left(\frac{w}{z}\right)^n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{z}\right)^{N+1}\right) \quad \forall\ t \in [a,b] \text{ y } \forall\ w \in [0, \infty e^{i\operatorname{Arg}(z)}). \tag{106}$$

Por tanto, los integrandos en el lado derecho de la ec. (105) verifican la hipótesis 2.ii) del teorema 2 hasta N términos con $f(w/z) \equiv q(w/z + a)$, $a_n \equiv q^{(n)}(a)/n!$ y $f(w/z) \equiv q(w/z + b)$, $a_n \equiv q^{(n)}(b)/n!$ respectivamente y $\lambda_n \equiv n$.

Por otra parte, usando que $q(t)$ es una función contínua en $[a, \infty)$ y que $q(t) \equiv 0$ en un entorno del infinito, tenemos que $\exists\ K \geq 1$ y $K < \infty$ verificando $|q(t)| \leq K\ \forall\ t \in [a, \infty)$. Por tanto, $f(w/z) \leq K\ \forall\ w \in [0, \infty e^{i\text{Arg}(z)})$ y el resto de condiciones del teorema 2 se verifican con $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\text{Arg}(z)})$, $g(w) \equiv K$ para cualquier $r_0 > 0$ y $h(w) \equiv e^{-w}$ para cada una de las integrales de la ec. (105). Entonces, usando (106) y aplicando este teorema obtenemos la ec. (101). La cota (103) se obtiene diréctamente de (34).

La demostración es similar en el caso $b = \infty$ suprimiendo la segunda integral en la fórmula (104). Pero en este caso, $|q(t)|$ puede no estar acotado en $[0, \infty)$. En cualquier caso, $|e^{-zt}q(t)|$ debe estar acotado $\forall\ t \in [a, \infty)$ por alguna constante $K \geq 1\ \forall\ |z| \geq r_0$. Por tanto, $|e^{-r_0 w/z}q\,(w/z + a)\,| \leq K\ \forall\ |z| \geq r_0,\ \forall\ w \in [0, \infty e^{i\text{Arg}(z)})$ y entonces, $|q\,(w/z + a)\,| \leq Ke^{\text{Re}(w)/2}\ \forall\ |z| \geq 2r_0,\ \forall\ w \in [0, \infty e^{i\text{Arg}(z)})$ y se verifican las condiciones del teorema 2. La cota (103) se obtiene diréctamente de (34) con $g(w) \equiv Ke^{\text{Re}(w)/2}$. □

Corolario 3. (*Integración por partes aplicada a transformadas de Fourier,* [3, *p.* 78], [18 *p.* 15]). *Supongamos que $I(x)$ está definida por la integral*

$$I(x) = \int_a^b e^{ixt} q(t) dt, \tag{107}$$

donde $0 \leq a < \infty$, $0 < b < \infty$, $x \in \mathrm{R}$, $|x| \geq x_0$ *y* $q : [a, b] \longrightarrow \mathcal{C}$ *tiene hasta* N *derivadas contínuas en el intervalo* $[a, b]$.
Entonces, para $|x| \to \infty$,

$$I(x) = \frac{ie^{iax}}{x}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(a)}{(-ix)^n} + \mathcal{O}(x^{-(N+1)})\right] - \frac{ie^{ibx}}{x}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(b)}{(-ix)^n} + \mathcal{O}(x^{-(N+1)})\right] \tag{108}$$

donde el resto $\epsilon_N(z)$ *está acotado por*

$$|\epsilon_N(z)| \leq \left(\frac{r_N}{|x|}\right)^{N+1}\left[2K + \delta \sum_{n=0}^{N+1} \frac{|q^{(n)}(a)| + |q^{(n)}(b)|}{n! r_N^n}\right](N+1)! \tag{109}$$

Dem. Es similar a la del corolario anterior cambiando z por $-ix$. □

Hemos excluido el caso $b = \infty$ de este corolario porque en este caso, la cota $|f(iw/x)| \leq K$ no es suficiente para garantizar que la condición 2.iv) del teorema 2 se satisface. En cualquier caso, las ecs. (108)-(109) siguen siendo ciertas para $b = \infty$ si se satisfacen las condiciones del siguiente corolario.

Corolario 4. *Supongamos que $I(x)$ está definido por la ec. (107) con $b \equiv \infty$ y*
4.a) $\exists\ \alpha \in (0, \pi/2)$ *si* $x > 0$ *o* $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ *si* $x < 0$ *de modo que*

$$\int_0^{\infty e^{i\alpha}} \left|q(w + a)e^{ixw} dw\right| < \infty \quad \forall\ |x| \geq x_0. \tag{110}$$

4.b) La función $q(w + a)$ es analítica en el sector $S_\alpha \equiv \{w \in \mathcal{C},\ |Arg(w)| \leq \alpha\}$.

Entonces, para $|x| \to \infty$, la ecuación (108) y la cota (109) son ciertas con $q^{(n)}(b) = 0 \; \forall$ $n \geq 0$.

Dem. Con el cambio de variable $t = a + s$ en la integral (107) para $b \equiv \infty$. y usando la condición 4.b) y el teorema de los resíduos,

$$I(x) = e^{iax} \int_0^{\infty \exp(i\alpha)} e^{ixs} q\,(s + a)\, ds. \tag{111}$$

Y con el cambio de variable $s = iw/x$,

$$I(x) = \frac{ie^{iax}}{x} \int_0^{\infty \exp i(\alpha \mp \pi/2)} e^{-w} q\left(\frac{iw}{x} + a\right) dw, \tag{112}$$

donde $\mp$ debe elegirse según $x > 0$ ó $x < 0$ respectivamente. Usando la condición 4.b) otra vez, el integrando de esta ecuación verifica la hipótesis 2.ii) del teorema 2 con $a_n \equiv i^n q^{(n)}(a)/n!$, $\lambda_n \equiv n$ y $f(w/x) \equiv q(iw/x + a)$,

$$q\left(\frac{iw}{x} + a\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q^{(n)}(a)}{n!} \left(\frac{iw}{x}\right)^n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{w}{x}\right)^{N+1}\right). \tag{113}$$

Por otra parte, usando las condiciones 4.a) y 4.b), $\exists\ K \geq 1$ y $K < \infty$ verificando $|q(s + a)e^{ixs}| \leq K \; \forall \; s \in [0, \infty e^{i\alpha})$ y $|x| \geq x_0$. Por tanto, $|q(s + a)| \leq K e^{|x_0 s \sin\alpha|} \; \forall \; s \in [0, \infty e^{i\alpha})$. Entonces, $|f(w/x)| \leq K e^{|w \sin\alpha|/2} \; \forall \; w \in [0, \infty e^{i(\alpha \mp \pi/2)})$ y $|x| \geq 2x_0$ y la integral (112) verifica también el resto de las condiciones del teorema 2 con $g(w) \equiv K e^{|w \sin\alpha|/2}$, $h(w) \equiv e^{-w}$, $r_0 \equiv 2x_0$ y $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i(\alpha \mp \pi/2)})$. Usando la ec. (113) y aplicando este teorema obtenemos la ecuación (108) con $q^{(n)}(b) \equiv 0 \; \forall \; n \geq 0$. $\square$

Corolario 5. (*El método de Laplace,* [18 *p.* 58]*). Supongamos que $I(z)$ está definida por la integral*

$$I(z) = \int_{x_0}^{x_2} e^{-zh(x)} f(x) dx, \tag{114}$$

en el intervalo real (x_0, x_2), donde $Re(z) > 0$, $|z| \geq r_0$ y $h : (x_0, x_2) \longrightarrow$ R y f : $(x_0, x_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ verifican

5.a) $h(x) > h(x_0) \; \forall \; x \in (x_0, x_2)$.

5.b) $\forall \; \epsilon > 0$, $\inf_{x \in [x_0 + \epsilon, x_2)} [h(x) - h(x_0)] > 0$.

5.c) $h'(x)$ y $f(x)$ son contínuas en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ para algún $\delta > 0$.

5.d) Cuando $x \to x_0^+$,

$$h(x) \sim h(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+b}, \tag{115}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+a-1}, \tag{116}$$

$$h'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n + b)(x - x_0)^{n+b-1}, \tag{117}$$

donde b, $c_n \in$ R, a, $b_n \in \mathcal{C}$, $b > 0$ y $Re(a) > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$.
Entonces, para $|z| \to \infty$ y $|Arg(z)| < \pi/2$,

$$I(z) \sim e^{-zh(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+a}{b}\right) \frac{a_n}{z^{(n+a)/b}}, \tag{118}$$

donde los coeficientes a_n son los de la expansión $f(x)/h'(x)$ en serie de potencias de $h(x) - h(x_0)$ y pueden obtenerse de (115)-(117),

$$\frac{f(x)}{h'(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (h(x) - h(x_0))^{(n+a)/b-1}. \tag{119}$$

Dem. Las condiciones 5.a)-5.c) implican que $\exists\ x_1 \in (x_0, x_2)$ tal que $h'(x)$ y $f(x)$ son contínuas en $(x_0, x_1]$ y $h'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, x_1]$. Escribamos

$$I(z) = e^{-zh(x_0)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-z(h(x)-h(x_0))} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} e^{-zh(x)} f(x) dx. \tag{120}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la ecuación (92) obtenemos, para $|z| \geq r_0$, que la segunda integral en el lado derecho de la ecuación anterior verifica

$$\left| e^{zh(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} e^{-zh(x)} f(x) dx \right| \leq M(r_0, \eta) |e^{-\eta z}|, \tag{121}$$

donde $\eta \equiv \inf_{x_1 \leq x < x_2} \{h(x) - h(x_0)\}$ es positivo usando la condición 5.b) y

$$M(r_0, \eta) \equiv \left| e^{r_0(\eta + h(x_0))} \right| \int_{x_1}^{x_2} \left| e^{-r_0 e^{i\mathrm{Arg}(z)} h(x)} f(x) \right| dx < \infty. \tag{122}$$

Por tanto,

$$I(z) = e^{-zh(x_0)} \left[\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(h(x)-h(x_0))} f(x) dx + \mathcal{O}(e^{-\eta z}) \right]. \tag{123}$$

Realizamos ahora el cambio de variable $t(x) = h(x) - h(x_0)$ y $w = zt(x)$ y definimos $q(t) \equiv f(x(t))(dx(t)/dt) = f(x(t))/h'(x(t))$. Como $h(x)$ es creciente en (x_0, x_1), la integral del lado derecho de (123) se escribe de la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(h(x)-h(x_0))} f(x) dx = \frac{1}{z} \int_0^{zt(x_1)} e^{-w} q\left(\frac{w}{z}\right) dw. \tag{124}$$

Demostremos ahora que las condiciones 5.a)-5.d) anteriores implican las condiciones del teorema 5 para la integral en el lado derecho de la ec. (124). Debemos tomar entonces $h(w) \equiv e^{-w}/w$, $f(w/z) \equiv (w/z) q(w/z)$ y $T \equiv t(x_1)$.
$I(z)$ es finita $\forall\ |z| \geq r_0$ y entonces, se verifica la hipótesis 5.i) con $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(x_1))})$.
La ecuación (119) significa que la hipótesis 5.ii) también se verifica con $\lambda_n = (n + a)/b$.
Usando que $h'(x)$ y $f(x)$ son contínuas en $(x_0, x_1]$ y $h'(x) > 0\ \forall\ x \in (x_0, x_1]$, tenemos que $q(t)$ es contínua en $(0, t(x_1)]$ y entonces $q(t)$ es contínua en $[r_N^{-1}, t(x_1)]\ \forall\ r_N^{-1} > 0$. Por tanto,

$$\exists K > 0, \quad \left| q\left(\frac{w}{z}\right) \right| \leq K \quad \text{para } r_N^{-1} \leq \left| \frac{w}{z} \right| \leq t(x_1) \tag{125}$$

Y se verifica la condición 5.iii) con $g(w) = K|w|/r_0$. La condición 5.iv) se verifica trivialmente y, usando la misma argumentación que en el corolario 1, observamos que la condición 5.v) también se satisface. Por tanto, podemos aplicar el teorema 5 y obtenemos (58), donde las integrales dentro del corchete son precisamente $\Gamma((n+a)/b)$, obteniendo (118).

Corolario 6. (*Método de Perron,* [18 *p.* 103]*). Supongamos que $I(z)$ está definida por la integral*

$$I(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{zf(w)} g(w) dw, \tag{126}$$

donde $\mathcal{C}$ es una curva en el plano complejo que empieza en $w_0 \in \mathbb{C}$ y termina en $w_2 \in \mathbb{C}$ o $w_2 = \infty$, $|z| \geq r_0 > 0$ y $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ verifican

6.a) $|Arg(zf(w_0) - zf(w))| < \pi/2 \ \forall \ w \in \mathcal{C}$.

6.b) $\forall \ s \in \mathcal{C}$, $s \neq w_0$, $\exists \ \Delta(s) > 0$, $|f(w) - f(w_0)| \geq \Delta(s) \ \forall \ w \in \mathcal{C}_s$, donde $\mathcal{C}_s$ denota el trozo de $\mathcal{C}$ con principio en w_0 y final en s.

6.c) $f(w) = f(w_0) - \mu(w - w_0)^b(1 - \phi(w))$, con $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$, $b > 0$, $\phi(w)$ analítica en $w = w_0$ y $\phi(w_0) = 0$.

6.d) Para hacer que $(w - w_0)^b$ sea una función monovaluada para valores positivos de b, introducimos un corte en el plano complejo desde $w = w_0$ hasta ∞ a lo largo de una cierta línea radial $Arg(w - w_0) = \gamma$. La curva $\mathcal{C}$ puede tocar o coincidir con una de las caras del corte, pero no debe cruzarla. Además, $\exists \ v \in \mathcal{C}$, $\forall \ w_1 \in \mathcal{C}$ entre w_0 y v, el camino $\mathcal{C}_{w_1}$ puede deformarse en la línea radial $Arg(w - w_0) = Arg(w_1 - w_0)$.

6.e) En un entorno de w_0, $g(w) = (w - w_0)^{\nu - 1}\psi(w)$, donde $Re(\nu) > 0$, $\psi(w)$ es analítica en $w = w_0$ y $\psi(w_0) \neq 0$.

Entonces, para $|z| \to \infty$,

$$I(z) \sim e^{zf(w_0)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi k i(\nu+n)/b} \frac{a_n}{z^{(n+\nu)/b}} \tag{127}$$

uniformemente con respecto a $Arg(z)$ en el sector

$$(4k-1)\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(\mu) + b \lim_{w \to w_0} \operatorname{Arg}(w - w_0) < (4k+1)\frac{\pi}{2}, \tag{128}$$

para algun entero k y

$$a_n \equiv \frac{\Gamma\left((\nu+n)/b\right)}{b\mu^{(\nu+n)/b} n!} \frac{d^n}{dw^n} \left\{ \psi(w) \left[\frac{\mu(w - w_0)^b}{f(w_0) - f(w)} \right]^{(\nu+n)/b} \right\}_{w=w_0}. \tag{129}$$

Dem. Tomemos $w_1 \in \mathcal{C}_v$ donde v verifica 6.d) y escribamos

$$I(z) = \int_{\mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)} g(w) dw + \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)} g(w) dw, \tag{130}$$

Siguiendo los pasos de ref. [18, pp. 109−110] y usando las condiciones 6.a) y 6.b) tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)}g(w)dw = e^{zf(w_0)}\mathcal{O}(e^{-\epsilon|z|}), \tag{131}$$

para algún $\epsilon > 0$. Por tanto,

$$I(z) = \int_{\mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)}g(w)dw + e^{zf(w_0)}\mathcal{O}(e^{-\epsilon|z|}). \tag{132}$$

Usando 6.c) y 6.e), podemos escribir la integral del lado derecho de esta igualdad como

$$\int_{\mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)}g(w)dw = e^{zf(w_0)}\int_{\mathcal{C}_{w_1}} (w-w_0)^{\nu-1}\psi(w)e^{-z\mu(w-w_0)^b(1-\phi(w))}dw. \tag{133}$$

Usando 6.d), podemos deformar $\mathcal{C}_{w_1}$ en una recta que une w_0 y w_1. Con el cambio de variable $t(w) = \mu(w-w_0)^b$ y $t(w) \to t/z$, obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}_{w_1}} e^{zf(w)}g(w)dw = \frac{e^{2\pi ki\nu/b}e^{zf(w_0)}}{b(\mu z)^{\nu/b}}\int_0^{zt(w_1)} t^{\nu/b-1}e^{-t}\psi\left(w\left(\frac{t}{z}\right)\right)e^{t\phi(w(t/z))}dt, \tag{134}$$

donde, usando (128), la variable compleja t verifica

$$(4k-1)\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(t) < (4k+1)\frac{\pi}{2}. \tag{135}$$

Vamos a demostrar ahora que las condiciones 6.a)-6.e) implican las condiciones del teorema 6 para la integral del lado derecho de la ecuación (134). Por tanto, debemos tomar $h(t) \equiv t^{\nu/b-1}e^{-t}$, $f(t,z) \equiv \psi\left(w\left(t/z\right)\right)e^{t\phi(w(t/z))}$ y $T \equiv t(w_1)$.
La integral (126) es finita para $|z| \geq r_0$ por definición y entonces, el integrando del lado derecho de (134) es integrable en $\mathcal{C} \equiv [0, e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))})$. Por tanto, se satisface la condición 6.i). Usando c) y e) tenemos que, para algún $\rho > 0$ y $|w-w_0| \leq 2\rho$,

$$\psi(w)e^{t\phi(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)(w-w_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)e^{2\pi nki/b}\left(\frac{t}{\mu z}\right)^{n/b}, \tag{136}$$

donde

$$b_n(t) \equiv \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dw^n}\left\{\psi(w)e^{t\phi(w)}\right\}_{w=w_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\psi(w)e^{t\phi(w)}}{(w-w_0)^{n+1}}dw. \tag{137}$$

El contorno de integración en esta fórmula es un círculo de radio 2ρ con centro w_0 y ρ lo suficientemente pequeño como para que $\bar{\phi} \equiv \sup_{|w|\leq 2\rho}(\phi(w)) < 1$. Esta cota es posible porque $\phi(w_0) = 0$ y $\phi(w)$ es analítica en w_0. Por tanto,

$$|b_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{\psi}e^{\bar{\phi}|t|}}{(2\rho)^n}d\alpha = \bar{\psi}\frac{e^{\bar{\phi}|t|}}{(2\rho)^n}, \tag{138}$$

donde hemos definido $\bar{\psi} \equiv \sup_{|w|\leq 2\rho}(\psi(w))$. Entonces, usando (136), (137) y (138), se satisface la hipótesis 6.ii) del teorema 6 con $a_n(t) \equiv b_n(t)(t/\mu)^{n/b}e^{2\pi kni/b}$, $r(t) \equiv |t/(\mu\rho^b)|$ y $\lambda_n \equiv n/b$ en $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))})$. Tomemos w_1 lo suficientemente cercano a w_0 para que $|w_1 - w_0| \leq \rho$. Entonces, la condición 6.iii) del teorema 6 se satisface trivialmente en $[0, zt(w_1))$ para $g(t) \equiv 0$ por ejemplo. Para verificar la condición 6.iv), debemos observar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n(t)|\rho^n \leq 2\bar{\psi}e^{\bar{\phi}|t|} \tag{139}$$

y entonces la condición 6.iv) se satisface. La condición 6.v) se comprueba de forma parecida a como hicimos en el corolario 1, pero usando también la cota (138). Entonces, podemos aplicar el teorema 6 y obtenemos que la integral del lado derecho de la igualdad (134) es (71) con $\lambda_n = n/b$ y las integrales dentro del corchete están dadas por

$$\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zT)}} h(w)a_n(w)dw = \frac{e^{2\pi kni/b}}{\mu^{n/b}} \int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))}} e^{-t}t^{(n+\nu)/b-1}b_n(t)dt. \tag{140}$$

Pero, $|\psi(w)e^{t\phi(w)}| \leq \bar{\psi}e^{\bar{\phi}|t|}$ $\forall\ w \in B(w_0, 2\rho)$ y

$$\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))}} |t^{(n+\nu)/b-1}|e^{(\bar{\phi}-1)|t|}|dt| < \infty. \tag{141}$$

Entonces, introduciendo la definición (137) de $b_n(t)$ en la integral del lado derecho de la igualdad (140), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))}} t^{(n+\nu)/b-1}b_n(t)e^{-t}dt \\
&\quad = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dw^n}\left[\int_0^{\infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(w_1))}} t^{(n+\nu)/b-1}e^{-t}\psi(w)e^{t\phi(w)}dt\right]_{w=w_0} \\
&\quad = \frac{1}{n!}\Gamma\left(\frac{n+\nu}{b}\right)\frac{d^n}{dw^n}\left[\frac{\psi(w)}{(1-\phi(w))^{(n+\nu)/b}}\right]_{w=w_0}.
\end{aligned} \tag{142}$$

Sustituyendo (142) en el lado derecho de (140), la ecuación (140) en (71) y multiplicando (71) por el factor que precede a la integral en el lado derecho de (134), obtenemos (127)-(129). $\square$

Corolario 7. (*Método de descenso rápido,* [18 *p.* 84]*). Supongamos que* $I(z)$ *está definida por la integral*

$$I(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{zf(w)}g(w)dw, \tag{143}$$

donde $\mathcal{C}$ *es una curva en el plano complejo,* $|z| \geq r_0$*,* $Re(z) > 0$ *y*

7.a) $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *son funciones enteras y*

7.b) Podemos deformar el camino $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *de modo que* $\mathcal{C}'$ *contiene uno o más ceros de* $f'(w)$ *y la parte imaginaria de* $f(w)$ *es constante a lo largo de* $\mathcal{C}'$*.*

Siguiendo ref. [18, *pp.* $84 - 88$]*, la integral (143) sobre el camino* $\mathcal{C}'$ *puede escribirse*

$$I(z) = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} e^{zf(w)}g(w)dw, \tag{144}$$

donde el camino $\mathcal{C}_i$ es un camino de descenso rápido que empieza en un punto silla w_i de Re$(f(w))$ de orden $m_i - 1$ y acaba en un cierto punto $v_i \in \mathbb{C}$ ó $v_i = \infty$. El índice i recorre todos los puntos silla de Re$(f(w))$.
Siguiendo ref. [18, pp. $88 - 90$], hacemos el cambio $t(w) = f(w_i) - f(w)$ sobre cada uno de los caminos $\mathcal{C}_i$. La función $t(w)$ crece monótonamente puesto que los caminos $\mathcal{C}_i$ son caminos de descenso rápido. Ahora, expandimos el producto $g(w(t))(dw(t)/dt)$ entorno a $t = 0$ para cada camino $\mathcal{C}_i$,

$$\exists\ t_i > 0, \quad g(w(t))\frac{dw(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} t^{(n+1-m_i)/m_i} \qquad \forall\ t \leq t_i. \tag{145}$$

Y para cada i, Arg(z) debe satisfacer también $|$ Arg$(z)+m_i \lim_{w\to w_i}$Arg$(w-w_i)+$ Arg$(b_0^{(i)})| < \pi/2$, donde $-b_0^{(i)}$ es el primer coeficiente no nulo de la expansión de $f(w) - f(w_i)$ en potencias de $w - w_i$.
Entonces, para $|z| \to \infty$,

$$I(z) \sim \sum_i e^{zf(w_i)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+1}{m_i}\right) \frac{c_n^{(i)}}{z^{(n+1)/m_i}}, \tag{146}$$

Dem. En cada uno de los caminos de integración $\mathcal{C}_i$ de las integrales en (144), elegimos un punto c_i que verifique $t(c_i) \leq t_i$ y dividimos cada camino $\mathcal{C}_i$ por el punto c_i. Cada integral en (144) se escribe

$$\int_{\mathcal{C}_i} e^{zf(w)} g(w)dw = \int_{\mathcal{A}_i} e^{zf(w)} g(w)dw + \int_{\mathcal{C}_i\setminus\mathcal{A}_i} e^{zf(w)} g(w)dw, \tag{147}$$

donde el camino $\mathcal{A}_i$ empieza en w_i y acaba en c_i. La segunda integral en la fórmula anterior puede escribirse

$$\int_{\mathcal{C}_i\setminus\mathcal{A}_i} e^{zf(w)} g(w)dw = e^{zf(c_i)} \int_{\mathcal{C}_i\setminus\mathcal{A}_i} e^{z(f(w)-f(c_i))} g(w)dw. \tag{148}$$

Pero $f(w) - f(c_i) \leq 0\ \forall\ w \in \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{A}_i$ y entonces, $|e^{z(f(w)-f(c_i))}| \leq |e^{r_0 e^{i\text{Arg}(z)}(f(w)-f(c_i))}|\ \forall$ $|z| \geq r_0$ y $\text{Re}(z) > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{C}_i\setminus\mathcal{A}_i} e^{zf(w)}\ g(w)dw\right| &\leq \left|e^{zf(c_i)}\right| \\ &\times \int_{\mathcal{C}_i\setminus\mathcal{A}_i} \left|e^{r_0 e^{i\text{Arg}(z)}(f(w)-f(c_i))} g(w)dw\right| = \mathcal{O}(e^{zf(c_i)})\end{aligned} \tag{149}$$

y cada integral en (144) puede escribirse

$$\int_{\mathcal{C}_i} e^{zf(w)} g(w)dw = \int_{\mathcal{A}_i} e^{zf(w)} g(w)dw + e^{zf(w_i)} \mathcal{O}(e^{z(f(c_i)-f(w_i))}). \tag{150}$$

Con los cambios de variable $t(w) = f(w_i) - f(w)$ y $t(w) \to t/z$, la integral del lado derecho de esta ecuación se escribe

$$\int_{\mathcal{A}_i} e^{zf(w)} g(w)dw = e^{zf(w_i)} \int_0^{zt(c_i)} e^{-t} g\left(w\left(\frac{t}{z}\right)\right) \frac{dw}{dt}\left(\frac{t}{z}\right) dt. \tag{151}$$

Vamos a demostrar ahora que se satisfacen las condiciones del teorema 6 para la última integral en el lado derecho de esta ecuación. Por tanto, tomamos $h(t) \equiv e^{-t}/t$, $f(t/z) \equiv (t/z)g(w(t/z))(dw(t/z)/d(t/z))$ y $T \equiv t(c_i)$.
(151) es finita $\forall\ |z| \geq r_0$ por definición. Por tanto, el integrando en el lado derecho de la ec. (151) es integrable en $\mathcal{C} \equiv [0, \infty e^{i\mathrm{Arg}(zt(c_i))})$ y se satisface la hipótesis 6.i) del teorema 6. Usando la ecuación (145), la hipótesis 6.ii) también se satisface con $a_n(t) \equiv c_n^{(i)} t^{(n+1)/m_i}$, $\lambda_n \equiv (n+1)/m_i$ y $r(t) \equiv t_i^{-1}|t|$. Hemos elegido $t(c_i) \leq t_i$ y entonces, se satisface trivialmente la condición 6.iii) con $g(t) \equiv 0$ por ejemplo, Teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n^{(i)}| t_i^{(n+1)/m_i} \tag{152}$$

es una constante finita independiente de t, se satisface también la condición 6.iv). La condición 6.v) se comprueba de la misma forma que en el corolario 1. Entonces, podemos aplicar el teorema 6, donde (71) se convierte en (146).

5. Comentarios finales.

Se ha introducido una modificación del MITT de obtención de expansiones asintóticas de integrales [3, p. 29, teorema 1.7.5.] dependientes de un cierto parámetro complejo z (para $|z| \to \infty$). El método modificado requiere básicamente que se satisfagan dos condiciones. La primera es que debemos conocer la expansión (convergente o asintótica) del integrando en serie de potencias de $1/z$. La segunda es que debe verificarse la cota (24) (o las equivalentes en el resto de teoremas de la sección 2) y las condiciones de integrabilidad (25) (o las equivalentes en el resto de teoremas). Estas propiedades son mucho menos restrictivas que la condición de uniformidad (7) requerida en el MITT clásico. Por tanto, esta versión resulta mucho más útil para resolver problemas prácticos, tal y como hemos visto en los ejemplos 1-2.

Como esta versión no requiere que el integrando tenga una forma demasiado especial, una de sus ventajas es su amplio rango de aplicabilidad. Otra ventaja es que mantiene la simplicidad del MITT clásico: una vez que se ha encontrado la cota (24) y (25) ha sido chequeada (o lo equivalente en el resto de teoremas), el procedimiento para obtener la expansión asintótica es trivial: expandir el integrando en la secuencia $\{z^{-\lambda_n}\}$ e intercambiar suma e integral. Esto ha sido mostrado en ejemplos 3-4.

Hemos demostrado en los corolarios 1-7 que el lema de Watson, integración por partes aplicada a ciertas transformadas integrales, el método de Laplace, el método de Perron y el método de descenso rápido son corolarios del MITT. Todavía, otros métodos clásicos tales como fase estacionaria, sumabilidad o el método de Darboux están basados en el lema de Watson o en integración por partes [18]. La posibilidad de obtener más métodos asintóticos como corolarios del MITT es el objetivo de próximas investigaciones.

Agradecimientos

El autor quiere agradecer a los Profs. N. Temme y J. Sesma sus valiosos comentarios sobre el tema y al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza el apoyo prestado para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.

[2] N. Blestein, *Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary points near an algebraic singularity.* Comm. Pure Appl. Math., 19 (1966) 353–370.

[3] N. Blestein and R. A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover Pub., New York, 1986.

[4] B. G. S. Doman, *An Asymptotic Expansion for the Incomplete Beta Function*, Math. Comp. 65 (1996), 1283-1288.

[5] A. Erdelyi and M. Wyman, *The asymptotic evaluation of certain integrals*, Arch. Rational Mech. Anal., 14 (1963) 217-260.

[6] R. A. Handelsman and J. S. Lew, *Asymptotic expansions of Laplace transforms near the origin.* SIAM J. Math. Anal., 1 (1970) 118–129.

[7] R. A. Handelsman and N. Blestein, *Asymptotic expansions of integral transforms with oscillatory kernels: a generalization of the method of stationary phase.* SIAM J. Math. Anal., 4 (1973) 519–535.

[8] J. L. López and J. Sesma, *The Whittaker function $M_{\kappa,\mu}(z)$ as a function of κ.* Accepted in Constructive Approximation.

[9] E. C. Molina, *Expansions for Laplacian Integrals in terms of the Incomplete Gamma Functions*, International Congress of Mathematicians, Zurich, Bell System Technical Journal 11 (1932), 563-575.

[10] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.

[11] W. Rudin, *Real and Complex analysis, Second Edition*, MacGraw-Hill, New York, 1974.

[12] K. Soni, *Asymptotic expansion of the Hankel transform with explicit remainder terms.* Quart. Appl. Math., 50 (1982) 1–14.

[13] N. M. Temme, *The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions.* SIAM J. Math. Anal., 10 (1979) 757–766.

[14] N. M. Temme, *Incomplete Laplace Integrals: Uniform Asymptotic Expansions with Applications to the Incomplete Beta Function*, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 1638-1663.

[15] N. M. Temme, *Uniform asymptotic expansions of integrals: a selection of problems*, J.Comp. Appl. Math 65 (1995) 395-417.

[16] N. M. Temme, *Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1996.

[17] N. M. Temme, *Analytical methods for a selection of eliptic singular perturbation problems.* Report MAS-R9727, CWI-preprint, october (1997).

[18] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, Academic Press, New York, 1989.

[19] M. Wyman, *The method of Laplace*, Trans. Roy. Soc. Canada, 2 (1963) 227-256.