

ESTUDIO ASINTÓTICO DE POLINOMIOS ORTOGONALES EN LA TABLA DE ASKEY

Chelo Ferreira y Esmeralda Mainar

20 de abril de 2005

Resumen

En recientes trabajos se ha señalado que numerosos polinomios ortogonales de la tabla de Askey admiten desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Hermite y de Laguerre (ver [8], [10]). A partir de estos desarrollos, en [8] y [10] se obtuvieron varios límites conocidos y otros no conocidos entre los polinomios de la tabla de Askey. En este trabajo, realizamos un análisis exhaustivo de los tres primeros niveles de la tabla de Askey, completando de este modo el análisis asintótico desarrollado en [8] y [10]. Por una parte, obtenemos desarrollos asintóticos de los polinomios de Charlier, de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Hermite. Por otra parte, obtenemos desarrollos asintóticos de los polinomios de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Charlier. Por último, establecemos nuevas demostraciones para los límites conocidos entre polinomios de los tres primeros niveles de la citada tabla y deducimos límites nuevos.

Palabras claves: Desarrollos asintóticos, límites de polinomios, polinomios ortogonales, tabla de Askey, polinomios de Hermite, polinomios de Charlier, polinomios de Meixner, polinomios de Meixner-Pollaczek, polinomios de Krawtchouk, polinomios de Jacobi.

1. Introducción

La tabla de los polinomios de Askey recoge todas las familias conocidas de polinomios ortogonales que pueden definirse en términos de funciones hipergeométricas. En [6] puede encontrarse un estudio completo sobre los polinomios que aparecen en dicha tabla. En esta página Web se resumen, entre otros aspectos, las definiciones, relaciones de ortogonalidad,

relaciones de recurrencia, funciones generadoras o ecuaciones diferenciales satisfechas por estos polinomios. Algunas de las fórmulas que se incluyen se pueden encontrar en diferentes referencias bibliográficas.

Se conocen numerosas relaciones entre los polinomios de la tabla de Askey. Éstas vienen dadas en forma de límites cuando se hace variar algún parámetro de los que dependen los polinomios ortogonales hipergeométricos.

Los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (1)$$

juegan un papel muy importante en la obtención de numerosos límites de este tipo. Por ejemplo, los polinomios de Gegenbauer $G_n^\gamma(x)$, definidos mediante la función generadora

$$(1 - 2xw + w^2)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^\gamma(x) w^n, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad |w| < 1,$$

verifican las siguientes relaciones

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{G_n^\gamma(x)}{G_n^\gamma(1)} = x^n, \quad (2)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^{-n/2} G_n^\gamma(x/\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{n!} H_n(x). \quad (3)$$

Límites como los anteriores permiten estudiar aspectos importantes de estos polinomios como, por ejemplo, la localización de sus raíces. En este sentido, la igualdad (2) muestra que los ceros de $G_n^\gamma(x)$ se aproximan al origen cuando el parámetro γ toma valores que tienden a infinito. Del mismo modo, la igualdad (3) nos muestra la relación entre los polinomios de Gegenbauer y los polinomios de Hermite adecuadamente escalados, cuando el parámetro γ del que dependen los primeros tiende a infinito.

Análogamente, los polinomios de Laguerre, $L_n(x, \alpha)$, que se definen mediante la función generadora

$$(1 - w)^{-\alpha-1} e^{-wx/(1-w)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, \alpha) w^n, \quad \alpha, x \in \mathbf{C}, \quad |w| < 1, \quad (4)$$

verifican

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n} L_n(\alpha x, \alpha) = \frac{(1-x)^n}{n!}, \quad (5)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n/2} L_n(x\sqrt{\alpha} + \alpha, \alpha) = \frac{(-1)^n 2^{-n/2}}{n!} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (6)$$

En este caso, el límite (5) permite estudiar la localización de las raíces de $L_n(x, \alpha)$ y (6) relaciona los polinomios de Laguerre escalados adecuadamente con los polinomios de Hermite, cuando α tiende a infinito.

En [8] se observó que el límite (6) puede obtenerse como consecuencia de la existencia de un desarrollo asintótico de los polinomios de Laguerre en términos de polinomios de Hermite para valores grandes del parámetro α :

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n B^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{B^k} \frac{H_{n-k}(X)}{(n-k)!},$$

donde X , B y otros aspectos se detallarán a lo largo del trabajo. Este desarrollo tiene un carácter asintótico para valores grandes de $|\alpha|$ (ver Sección 2.1). En particular, el límite (6) se obtiene a partir de la aproximación que proporciona el primer término de este desarrollo.

El método a partir del cual puede obtenerse este tipo de desarrollos fue introducido en [8, 9, 10]. En particular, en [8] y [10] se describieron métodos para aproximar polinomios ortogonales en términos de polinomios de Hermite y polinomios de Laguerre, respectivamente.

Gracias a estos métodos, en [8], se obtuvieron desarrollos asintóticos de los polinomios de Laguerre y de Jacobi dados en términos de polinomios de Hermite. De igual modo, en [10], se obtuvieron desarrollos asintóticos de los polinomios de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Laguerre. Asimismo, en [8] y [9] se determinaron desarrollos asintóticos que no estaban incluidos en la tabla de Askey como, por ejemplo, los desarrollos en términos de polinomios de Hermite de los polinomios de Tricomi-Carlitz, de los generalizados de Bernoulli, de Euler, de Bessel y de Buchholz.

La obtención de estos desarrollos asintóticos se basa en el conocimiento de la función generadora de los polinomios y, por ello, se diferencia de las técnicas descritas en [3] y en [4]. Así, el método dado en [3] se basa en un problema de conexión y proporciona información acerca de las relaciones entre polinomios ortogonales discretos y continuos de la tabla de Askey. Sin embargo, el método que aquí se presenta proporciona desarrollos asintóticos de polinomios ortogonales situados en un nivel de la tabla de Askey en términos de polinomios situados en niveles inferiores y que, por lo tanto, son más sencillos. Este método también es distinto de los sofisticados métodos considerados en [11] y en [12], en donde se consiguen desarrollos asintóticos de los polinomios de Charlier o de los polinomios de Meixner de un cierto grado n para valores grandes de n . En el método que

aquí se presenta mantenemos el grado n constante y hacemos que ciertos parámetros de los polinomios tiendan a infinito.

En la Sección 2 describiremos el método desarrollado en [8] para obtener relaciones asintóticas en términos de polinomios de Hermite. Además, aplicaremos esta técnica para obtener desarrollos de los polinomios de Charlier, de Krawtchouk, de Meixner, de Meixner-Pollazchek y de Jacobi, obteniendo, de este modo, nuevos límites de los ya conocidos de la tabla de Askey. En la Sección 3 detallamos un nuevo procedimiento para obtener desarrollos en términos de polinomios de Charlier. Consideraremos los polinomios del tercer nivel de la tabla de Askey (polinomios de Krawtchouk, de Meixner, de Meixner-Pollazchek y de Jacobi) y obtendremos desarrollos asintóticos y, como consecuencia, límites de estos polinomios. En ambas secciones, ilustramos los resultados obtenidos mediante experimentos que muestran la precisión de las aproximaciones dadas en la Secciones 2 y 3.

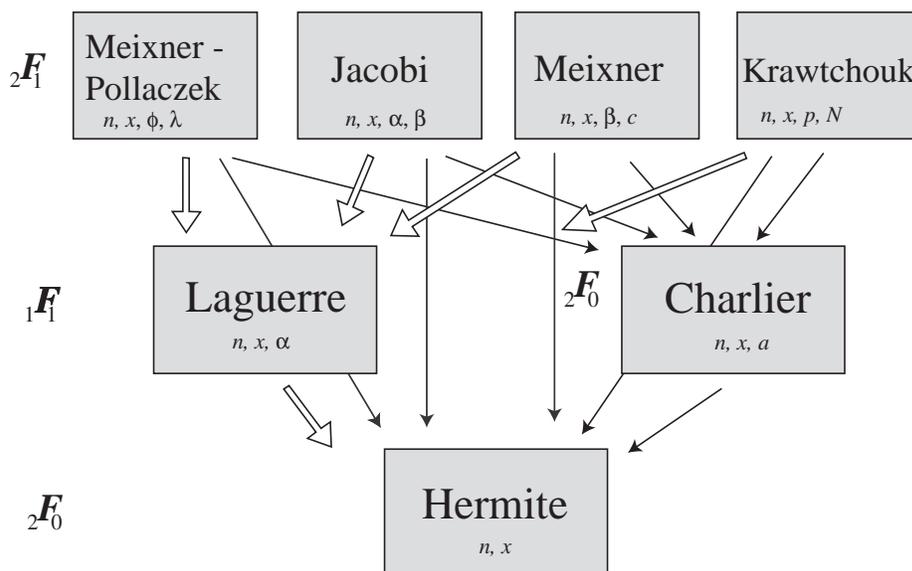


Figura 1: Tres últimos niveles de la tabla de Askey de los polinomios hipergeométricos ortogonales. Las flechas gruesas indican relaciones asintóticas conocidas entre los polinomios que conectan, mientras que las flechas finas indican nuevos desarrollos asintóticos obtenidos en este trabajo.

2. Desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Hermite

En esta sección, detallamos el método introducido en [8] para estudiar el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de la tabla de Askey y obtener, como consecuencia, límites de dichos polinomios en términos de polinomios de Hermite.

Los polinomios ortogonales de la tabla de Askey $p_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ se pueden representar a través de series de potencias que los generan mediante

$$F(x, w) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n(x)w^n, \quad (7)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica con respecto a la variable w en un dominio que contiene al origen. La función $F(x, w)$ se llama *función generadora* de la familia de funciones p_n (las cuales no dependen de la variable w).

A partir de la relación dada en (7) y aplicando el Teorema de Cauchy, se obtiene la siguiente representación integral del polinomio p_n

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(x, w)w^{-(n+1)} dw, \quad (8)$$

donde C es un círculo cerrado conteniendo al origen e incluido en el dominio de analiticidad de F .

A modo de ejemplo, consideremos los polinomios de Hermite $H_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ (ver (1)). Esta familia de polinomios se puede obtener a partir de la función generadora

$$e^{2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (9)$$

de donde se deduce la siguiente expresión integral

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C e^{2xw-w^2} w^{-(n+1)} dw, \quad (10)$$

donde C es un círculo cerrado conteniendo al origen e incluido en el dominio de analiticidad de F .

Mediante el siguiente resultado, expresaremos polinomios ortogonales $p_n(x)$ como una suma finita de términos que dependen de polinomios de Hermite $H_n(x)$.

Teorema 2.1 Sean $p_n(x)$ polinomios definidos por la función generadora

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)w^n, \quad (11)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica en $w = 0$ y $F(x, 0) = 1$. Sea

$$f(x, w) = e^{-Aw+Bw^2} F(x, w), \quad (12)$$

y $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$, la sucesión de coeficientes tales que

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)w^k, \quad c_0 = 1, \quad (13)$$

donde A y B no dependen de w . Entonces $p_n(x)$ puede representarse mediante

$$p_n(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k(x)}{z^k} \frac{H_{n-k}(\xi)}{(n-k)!}, \quad z = \sqrt{B}, \quad \xi = \frac{A}{2\sqrt{B}}, \quad (14)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de grado n .

Demostración. La representación integral de $p_n(x)$ dada en (8) se puede escribir como

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{Aw-Bw^2} f(x, w) w^{-(n+1)} dw. \quad (15)$$

Observemos que F como función de w es analítica y además $f(x, w) = e^{-Aw+Bw^2} F(x, w)$. Así pues, podemos deducir que f como función de w es también una función analítica y, por tanto, se puede expresar mediante una serie de potencias de w

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k. \quad (16)$$

A continuación, sustituimos (16) en (8) obteniendo de este modo

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) e^{Aw-Bw^2} w^{k-(n+1)} dw. \quad (17)$$

Puesto que los términos del sumatorio correspondientes a los índices k tales que $k - (n + 1) \geq 0$ son funciones analíticas en el interior del dominio de integración, entonces

$$\int_C c_k(x) e^{Aw-Bw^2} w^{k-(n+1)} dw = 0, \quad k \geq n + 1.$$

Por último, teniendo en cuenta la representación integral (10) de los polinomios de Hermite y realizando el cambio de variable $w \rightarrow \tilde{w} = \sqrt{B}w$ se obtiene (14). ■

Observemos que los coeficientes A y B de (12) pueden depender de la variable x . Por ello, si B se anula para algún valor de x_0 , entonces escribiremos

$$p_n(x_0) = A^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{A^k (n-k)!}.$$

Para obtener propiedades asintóticas de (14), tomaremos coeficientes A y B para los que $c_1 = c_2 = 0$. Bajo estas condiciones, estos coeficientes quedan determinados mediante

$$A = p_1(x), \quad B = \frac{1}{2} p_1^2(x) - p_2(x), \quad (18)$$

asumiendo que $F(x, 0) = p_0(x) = 1$ (lo cual implica $c_0 = 1$). Con esta elección de coeficientes, tenemos

$$\ln(F(x, w)) = p_1(x)w + \left(p_2(x) - \frac{1}{2} p_1^2(x) \right) w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad w \rightarrow 0$$

y por lo tanto, aproximamos en el origen la exponencial de (12) y la función $F(x, w)$.

En las siguientes secciones, deduciremos las propiedades de los desarrollos (14) a partir del comportamiento asintótico de los coeficientes c_k que en ellos intervienen, cuando el correspondiente parámetro tienda a infinito. El siguiente resultado será de gran utilidad para determinar buena parte de los comportamientos asintóticos de las sucesiones de coeficientes c_k que aparecerán en el trabajo.

Lema 2.1 Sean $\phi_1(w)$, $\phi_2(w)$ funciones analíticas en $w = 0$, cuyos desarrollos de Maclaurin se pueden escribir como

$$\phi_1(w) = \mu w^n (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots), \quad \phi_2(w) = w^n (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots),$$

donde n es un entero positivo y a_k, b_k son números complejos que no dependen de $\mu \in \mathbf{C}$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y, además, $a_0, b_0 \neq 0$. Sea $\phi(w) := \phi_1(w) + \phi_2(w)$ y sea $\{c_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ la sucesión formada por los coeficientes de la serie de potencias de la función $f(w) = e^{\phi(w)}$ y que, por lo tanto, verifica

$$f(w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k.$$

Entonces $c_0 = 1$, $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ y

$$c_k = \mathcal{O}\left(|\mu|^{[k/n]}\right), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Demostración. Consideramos, en primer lugar, el desarrollo en serie de potencias de $e^{\phi_1(w)}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k w^k &= e^{\phi_1(w)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_1(w))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k w^{kn}}{k!} (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots)^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Igualando los términos de los miembros de (19) correspondientes a potencias de w del mismo grado, deducimos que $\tilde{c}_0 = 1$, $\tilde{c}_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ y, además,

$$\tilde{c}_k = \mathcal{O}\left(|\mu|^{[k/n]}\right), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Por otra parte, si estudiamos el desarrollo en serie de potencias de $e^{\phi_2(w)}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k w^k &= e^{\phi_2(w)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_2(w))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{kn}}{k!} (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots)^k, \end{aligned}$$

deducimos que $\bar{c}_0 = 1$, $\bar{c}_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ y los coeficientes \bar{c}_k no dependen de μ .

Finalmente, obtenemos el resultado teniendo en cuenta

$$e^{\phi_1(w)+\phi_2(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k w^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k w^k \right)$$

e igualando de nuevo los términos de los miembros de la igualdad anterior correspondientes a potencias de w del mismo grado. ■

En las siguientes subsecciones aplicaremos el método desarrollado en el Teorema 2.1 para obtener desarrollos asintóticos de los polinomios ortogonales del segundo y tercer nivel de la Tabla de Askey en términos de polinomios de Hermite.

2.1. Polinomios de Charlier en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Charlier, se definen mediante la función generadora

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, a)}{n!} w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}. \quad (20)$$

Así pues, su representación integral (8) es

$$C_n(x, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x w^{-(n+1)} dw, \quad (21)$$

donde \mathcal{C} es un círculo alrededor del origen y la integración se hace en la dirección positiva.

Como en (12), hemos expresado la función generadora como

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = e^{Aw - Bw^2} f(x, w), \quad (22)$$

con coeficientes A y B que no dependen de w . Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$A := \frac{1}{a}(a - x), \quad B := \frac{x}{2a^2}.$$

De este modo, hemos obtenido la representación (14) de los polinomios de Charlier

$$C_n(x, a) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad z = \sqrt{\frac{x}{2a^2}}, \quad \xi = \frac{a-x}{\sqrt{2x}}. \quad (23)$$

Hemos comprobado que con nuestra elección de A y B , $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = -x/(3a^3)$ en (23). Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado

en ambos miembros de la igualdad (22) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$xw^2 f = (w - a)a^2 \frac{df}{dw}. \quad (24)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la siguiente relación de recurrencia

$$a^3(k+1)c_{k+1} = a^2kc_k - xc_{k-2}. \quad (25)$$

A partir de (25) podremos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 2$.

Para estudiar el comportamiento asintótico de (23), observemos que a partir de (25) y por inducción sobre k se puede deducir de manera sencilla que la sucesión de coeficientes c_k verifica

$$c_k = \mathcal{O}(a^{-k}), \quad a \rightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta que los polinomios de Hermite $H_n((a-x)/\sqrt{2x})$ tienen grado n con respecto a la variable a , es decir, $H_n((a-x)/\sqrt{2x}) = \mathcal{O}(a^n)$ cuando $a \rightarrow \infty$ y además, $z = \mathcal{O}(a^{-1})$ cuando $a \rightarrow \infty$, podemos determinar la naturaleza asintótica de los términos de (23), para valores grandes de a , con n y x fijados:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} c_k \left(\frac{x}{2a^2} \right)^{(n-k)/2} H_{n-k} \left(\frac{a-x}{\sqrt{2x}} \right) = 0, \quad \forall k > 0. \quad (26)$$

Las gráficas de la Figura 2 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Charlier mediante el primer término del desarrollo obtenido en (23) para valores crecientes del parámetro a . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

Para poder expresar el límite de los polinomios de Charlier, cuando su orden tiende a infinito, en términos de polinomios de Hermite, hacemos el cambio de variable $x \mapsto (2a)^{1/2}x + a$. Con este cambio tenemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \xi = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a - \sqrt{2ax} - a}{\sqrt{2(\sqrt{2ax} + a)}} = -x, \quad (27)$$

y $z = \sqrt{2(\sqrt{2ax} + a)}/2a$ verifica

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{2az} = 1. \quad (28)$$

Tomando límites en (23) y usando (26), (27) y (28) obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (2a)^{n/2} C_n((2a)^{1/2}x + a, a) = H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad (29)$$

que corresponde a uno de los límites conocidos de la tabla de Askey (ver Figura 1).

La Figura 3, ilustra el límite (29).

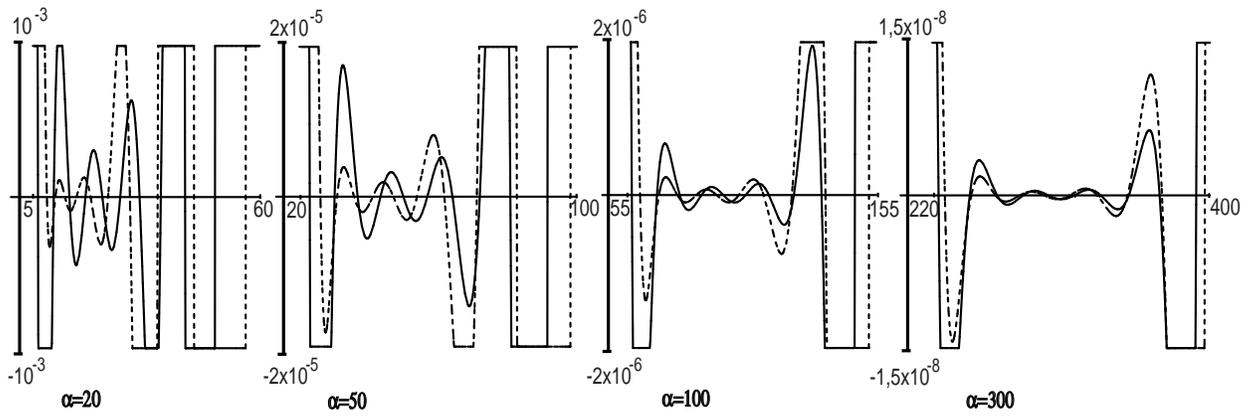


Figura 2: Aproximación obtenida con el primer término de (23) para $n = 10$. Las líneas continuas representan $C_{10}(x, a)$. Las líneas discontinuas representan $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

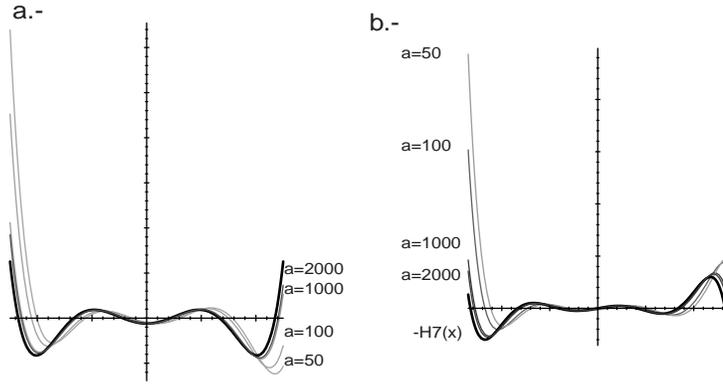


Figura 3: Límite (79) para diferentes a y $n = 10$.

2.2. Polinomios de Krawtchouk en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Krawtchouk $K_n(x; p, N)$ se definen mediante la función generadora

$$\left(1 - \frac{(1-p)}{p}w\right)^x (1+w)^{N-x} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} K_n(x; p, N) w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (30)$$

donde $n = 0, \dots, N$ y $0 < p < 1$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$\left(1 - \frac{(1-p)}{p}w\right)^x (1+w)^{N-x} = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (31)$$

donde A y B no dependen de ω . Al igual que en (18), para obtener un buen comportamiento asintótico, tomaremos

$$A = \frac{Np - x}{p}, \quad B = \frac{p^2N + x - 2xp}{2p^2}.$$

De este modo, la representación (14) se puede escribir como

$$\binom{N}{n} K_n(x; p, N) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{H_{n-k}(\xi)}{(n-k)!}, \quad (32)$$

donde

$$z = \sqrt{\frac{p^2 N + x - 2xp}{2p^2}}, \quad \xi = \frac{Np - x}{\sqrt{2(p^2 N + x - 2xp)}}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (32) y, además, $c_3 = (-x + 3xp - 3xp^2 + p^3 N)/3p^3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (31) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^2((2xp^2 - 3xp - p^3 N + p^2 N + x)w + x - 3xp + 3xp^2 - p^3 N)f = \\ = ((p-1)p^2 w^2 + (2p-1)p^2 w + p^3) \frac{df}{dw}. \end{aligned} \quad (33)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} p^3(k+1)c_{k+1} &= p^2(1-2p)kc_k - p^2(p-1)(k-1)c_{k-1} + \\ &+ (p^3 N - 3xp^2 + 3xp - x)c_{k-2} + \\ &+ (p^3 N - (2x+N)p^2 + 3xp - x)c_{k-3}. \end{aligned} \quad (34)$$

A partir de (34), siendo ya conocidos c_0 , c_1 , c_2 y c_3 , podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $N \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (31) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{w^3(N\phi_1(w) + x\phi_2(w))},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \ln(1+w) - w + w^2/2, \\ \phi_2(w) &= \ln\left(\frac{p - (1-p)w}{p(1+w)}\right) + w/p - (2p-1)w^2/(2p^2). \end{aligned}$$

De esta manera, aplicando el Lema 2.1 deducimos $c_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/3 \rfloor})$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Por último, teniendo en cuenta que $\xi = \mathcal{O}(N^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(N^{n/2})$ cuando $N \rightarrow \infty$, deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ definida por $\phi_k := c_k H_{n-k}(\xi)/z^k$ tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n/2 + \lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esta relación explica la naturaleza asintótica del desarrollo obtenido en (32) para valores grandes de N , fijados x y n .

Las gráficas de la Figura 4 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Krawtchouk mediante el primer término de la representación obtenida en (32) para valores crecientes del parámetro N . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

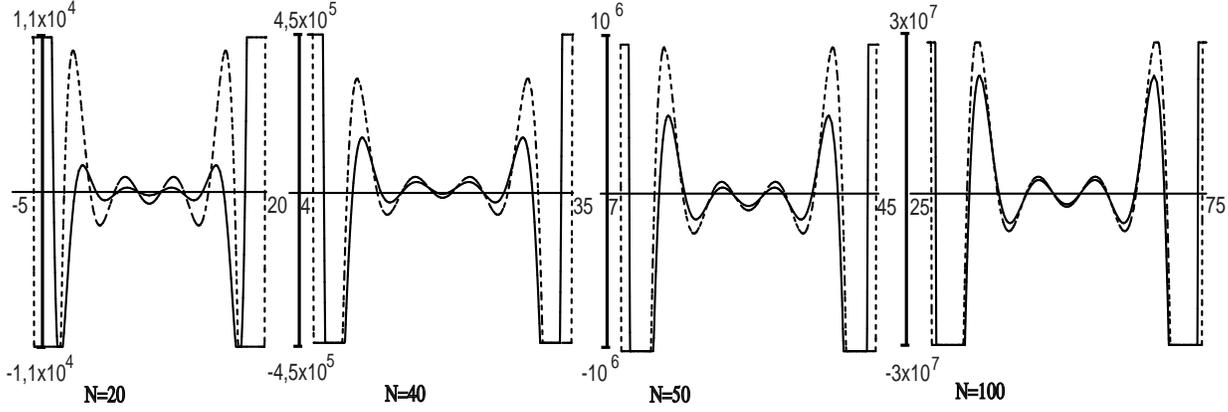


Figura 4: Aproximación obtenida con el primer término de (32) para $n = 10$ y $p = 1/2$. Las líneas continuas representan $K_{10}(x; p, N)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

Para poder expresar el límite de los polinomios de Krawtchouk, cuando $N \rightarrow \infty$, en términos de polinomios de Hermite, sustituimos $x \rightarrow pN + x\sqrt{2p(1-p)N}$. Con este cambio de variable

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-x\sqrt{p(1-p)N}}{\sqrt{p(1-p)N + (1-2p)x\sqrt{2p(1-p)N}}} = -x$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{\frac{(1-p)}{2p}N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{p(1-p)N + (1-2p)x\sqrt{2p(1-p)N}}}{\sqrt{p(1-p)N}} = 1.$$

De esta manera deducimos el siguiente límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n} \left(\sqrt{\frac{2p}{N(1-p)}} \right)^n K_n(pN + x\sqrt{2p(1-p)N}; p, N) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x). \quad (35)$$

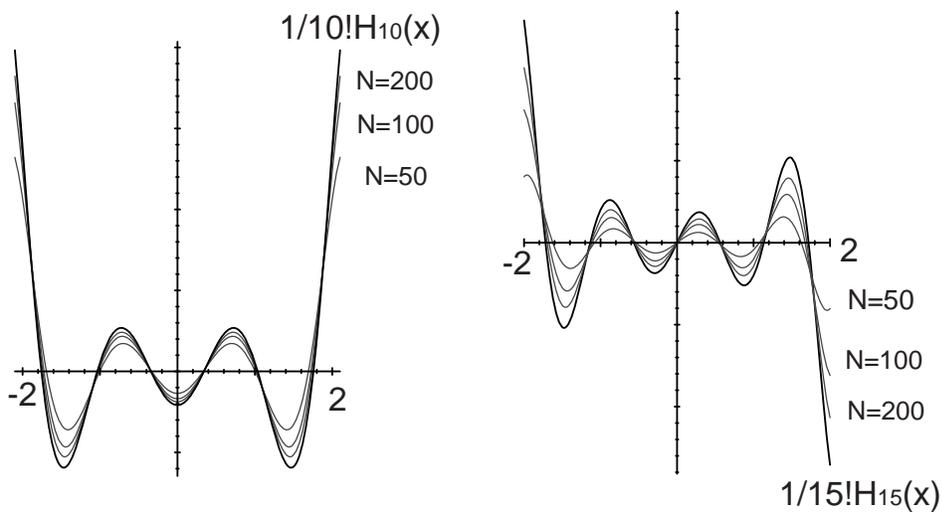


Figura 5: a.- Ilustra (35) para grado $n = 10$. b.- Ilustra (35) para grado $n = 15$.

2.3. Polinomios de Meixner en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Meixner $M_n(x; \beta, c)$ se definen mediante la función generadora

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(x; \beta, c) w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (36)$$

donde $\beta > 0$ y $0 < c < 1$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = e^{Aw - Bw^2} f(x, w), \quad (37)$$

donde A y B no dependen de ω .

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), definimos

$$A = \frac{1}{c}((c-1)x + \beta c), \quad B = \frac{1}{2c^2}((1-c^2)x - \beta c^2).$$

De este modo, la representación (14) se puede escribir como

$$M_n(x; \beta, c) = \frac{n!}{(\beta)_n} z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{H_{n-k}(\xi)}{(n-k)!}, \quad (38)$$

con

$$z = \sqrt{\frac{(1-c^2)x}{2c^2} - \frac{\beta}{2}}, \quad \xi = \frac{(c-1)x + \beta c}{2cz}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (38) y, además, $c_3 = ((c^3 - 1)x + c^3\beta)/3c^3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k

hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (37) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$w^2(x - \beta c^3 - c^3 x + w(\beta c^2 - x - c^2 x))f = c^2(-c + w(c + 1) - w^2)\frac{df}{dw}. \quad (39)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias, hemos obtenido la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} c^3(k+1)c_{k+1} &= c^2(c+1)kc_k - c^2(k-1)c_{k-1} + (\beta c^3 + c^3 x - x)c_{k-2} + \\ &+ (x - c^2 x + \beta c^2)c_{k-3}. \end{aligned} \quad (40)$$

A partir de (40), puesto que c_0 , c_1 , c_2 y c_3 son ya conocidos, podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $\beta \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (37) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{w^3(\beta\phi_1(w) + x\phi_2(w))},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= -\ln(1-w) - w - w^2/2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k+3}, \\ \phi_2(w) &= \ln\left(\frac{1-w/c}{1-w}\right) - (c-1)w/c - (c^2-1)w^2/(2c^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{k+3} - 1}{(k+3)c^{k+3}} w^k. \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1 deducimos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^{\lfloor k/3 \rfloor})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Por último, teniendo en cuenta que $\xi = \mathcal{O}(\beta^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(\beta^{n/2})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ con $\phi_k := c_k H_{n-k}(\xi)/z^k$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n/2 + \lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto explica la naturaleza asintótica de la representación dada en (38) para valores grandes del parámetro β , dejando x y n fijos.

Las gráficas de la Figura 6 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Meixner mediante el primer término de la representación obtenida en (38) para valores crecientes del parámetro β . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

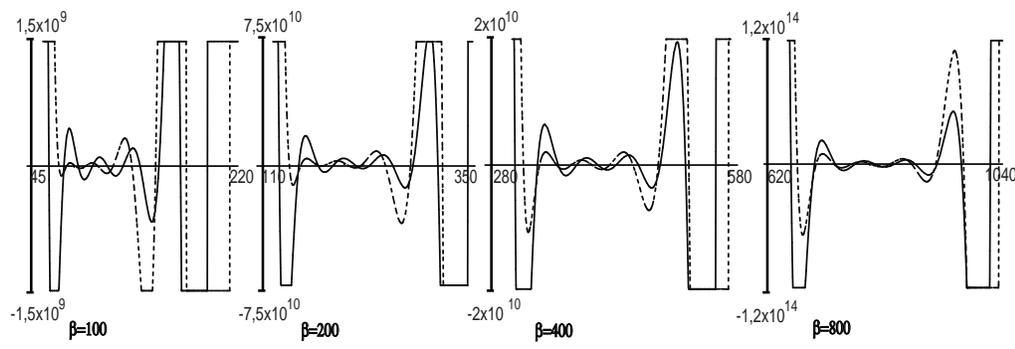


Figura 6: Aproximación obtenida con el primer término de (38) para $n = 10$ y $c = 1/2$. Las líneas continuas representan $M_{10}(x; \beta, c)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

Para expresar el límite de los polinomios de Meixner, cuando $\beta \rightarrow \infty$, en términos de los polinomios de Hermite, haremos el cambio de variable $x \rightarrow c(\beta - \sqrt{2\beta/c})/(1-c)$. Con este cambio, tenemos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{c\sqrt{2\beta/c}x}{\sqrt{2}\sqrt{c\beta - c(1-c)}\sqrt{2\beta}x} = x$$

y

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} z\sqrt{\frac{2c}{\beta}} = 1.$$

De esta manera deducimos el siguiente límite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta)_n \left(\frac{2c}{\beta}\right)^{n/2} M_n \left(\frac{c}{1-c} \left(\beta - \sqrt{\frac{2\beta}{c}} \right) x; \beta, c \right) = H_n(x). \quad (41)$$

2.4. Polinomios de Meixner-Pollaczek en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ se definen mediante la función generadora

$$(1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi)w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (42)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < \phi < \pi$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$(1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (43)$$

donde A y B no depended de ω .

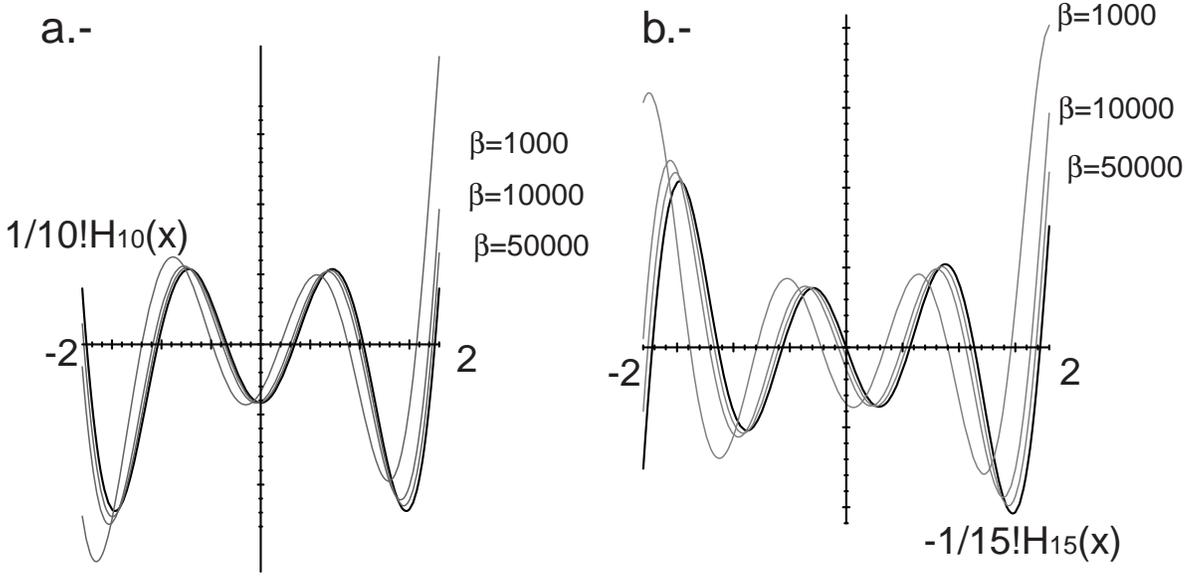


Figura 7: a.- Ilustra el límite (41) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (41) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$A = 2\lambda \cos(\phi) + 2 \sin(\phi)x, \quad B = -\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi).$$

De esta forma, el desarrollo (14) se puede expresar como

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad (44)$$

donde

$$z = \sqrt{-\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi)}, \quad \xi = \frac{\lambda \cos(\phi) + \sin(\phi)x}{\sqrt{-\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi)}}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (44) y, además, $c_3 = 2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))/3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (43) y deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$2w^2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi) - (\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))w)f = (1 - 2 \cos(\phi)w + w^2) \frac{df}{dw}. \quad (45)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la relación de recurrencia

$$(k+1)c_{k+1} = 2 \cos(\phi)kc_k - (k-1)c_{k-1} + 2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))c_{k-2} - 2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))c_{k-3}. \quad (46)$$

A partir (46), siendo ya conocidos c_0, c_1, c_2 y c_3 , podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $\lambda \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (43) es de la forma

$$f(x, w) = e^{w^3(\lambda\phi_1(w)+x\phi_2(w))},$$

con

$$\begin{aligned}\phi_1(w) &= -\ln\left((1-e^{i\phi}w)(1-e^{-i\phi}w)\right) - 2\cos(\phi)w - \cos(2\phi)w^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\cos((k+3)\phi)}{k+3} w^k, \\ \phi_2(w) &= i\ln\left(\frac{1-e^{i\phi}w}{1-e^{-i\phi}w}\right) - 2\sin(\phi)w - \sin(2\phi)w^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sin((k+3)\phi)}{k+3} w^k.\end{aligned}$$

De este modo, aplicando el Lema 2.1 deducimos $c_k = \mathcal{O}(\lambda^{[k/3]})$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Por último, teniendo en cuenta $\xi = \mathcal{O}(\lambda^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(\lambda^{n/2})$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ con $\phi_k := c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\lambda^{n/2+[k/3]-k}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Este comportamiento explica la naturaleza asintótica de la relación (44) para valores grandes de λ , con x y n fijados.

Las gráficas de la Figura 8 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Meixner-Pollazek mediante el primer término de la representación obtenida en (44) para valores crecientes del parámetro λ . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros.

Para expresar el límite de los polinomios de Meixner-Pollazek, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en términos de polinomios de Hermite, hacemos el cambio de variable $x \rightarrow (\sin(\phi))^{-1}(x\sqrt{\lambda} - \lambda \cos(\phi))$ en (44). De este modo cuando $\lambda \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{z}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\xi}{x} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n/2} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x\sqrt{\lambda} - \lambda \cos(\phi)}{\sin(\phi)}; \phi\right) = \frac{H_n(x)}{n!}. \quad (47)$$

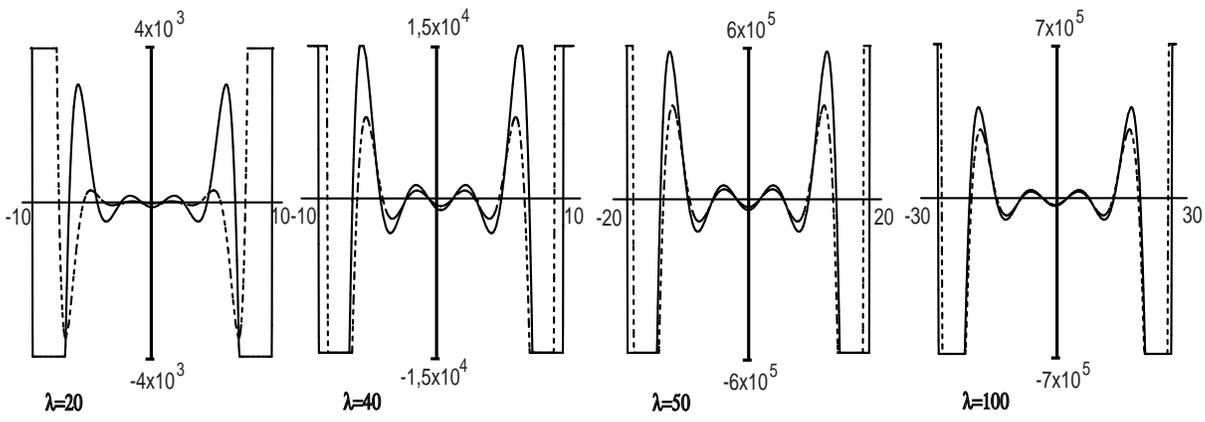


Figura 8: Aproximación obtenida con el primer término de (44) para $n = 10$ y $\phi = \pi/2$. Las líneas continuas representan $P_{10}^{(\lambda)}(x; \phi)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

2.5. Polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Jacobi $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ se definen mediante la función generadora

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\alpha, \beta)}(x)w^n, \quad R = \sqrt{1-2xw+w^2}, \quad (48)$$

con $x, w \in \mathbf{C}$, $\alpha > -1$ y $\beta > -1$.

Como en (12), escribimos la función generadora como

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (49)$$

donde A y B no dependen de ω .

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$\begin{aligned} A &= x + 1/2(\alpha + \beta)x + 1/2(\alpha - \beta), \\ B &= 1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

De esta manera, la representación (14) se puede escribir como

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad (50)$$

donde

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta)}, \\ \xi &= \frac{x + 1/2(\alpha + \beta)x + 1/2(\alpha - \beta)}{2\sqrt{1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta)}}. \end{aligned}$$

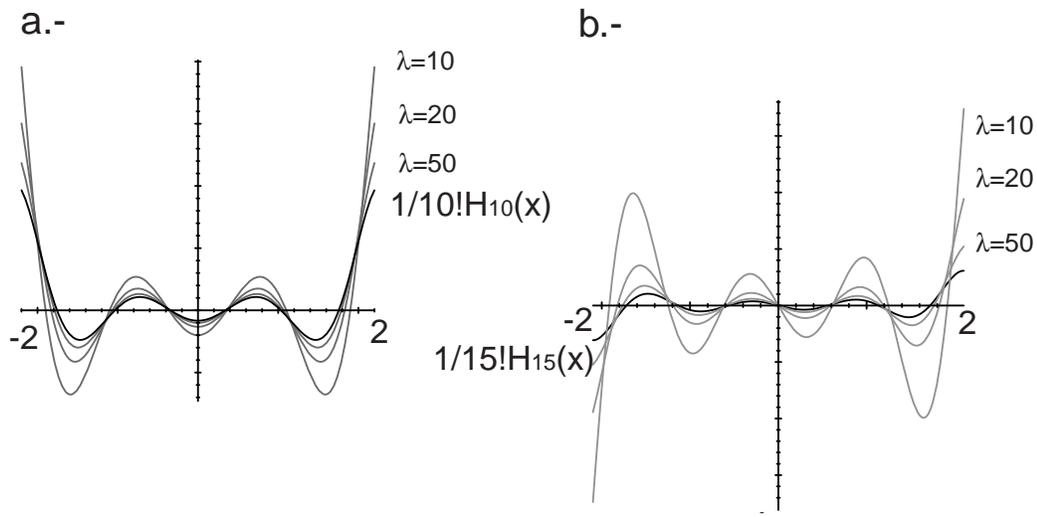


Figura 9: a.- Ilustra el límite (47) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (47) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

Nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ en (50). Por simplicidad, consideraremos que α y β verifican

$$\alpha + \beta \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \rightarrow 0.$$

La función $f(x, w)$ de (49) es de la forma

$$f(x, w) = e^{w^3(\phi_1(x, w) + (\alpha + \beta)\phi_2(x, w) + (\alpha - \beta)\phi_3(x, w))}.$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(x, w) &= -\ln(R(w)) - xw - (x^2 - 1/2)w^2, \\ \phi_2(x, w) &= -1/2 \left(\ln \left((1 + R(w))^2 - w^2 \right) - 2 \ln(2) + xw + (3x^2 - 1)w^2/4 \right), \\ \phi_3(x, w) &= 1/2 \left(\ln \left(\frac{1 + R(w) + w}{1 + R(w) - w} \right) - w - xw^2/2 \right). \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1 y puesto que $\xi = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n/2})$, $z = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{1/2})$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ definida por $\phi_k := c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n/2 + [k/3] - k}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Este comportamiento explica la naturaleza asintótica de la relación (50) para valores grandes de $\alpha + \beta$, con x y n fijados.

Las gráficas de la Figura 10 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Jacobi mediante el primer término de la representación obtenida en (50)

para valores crecientes del parámetro $\alpha + \beta$. Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros.

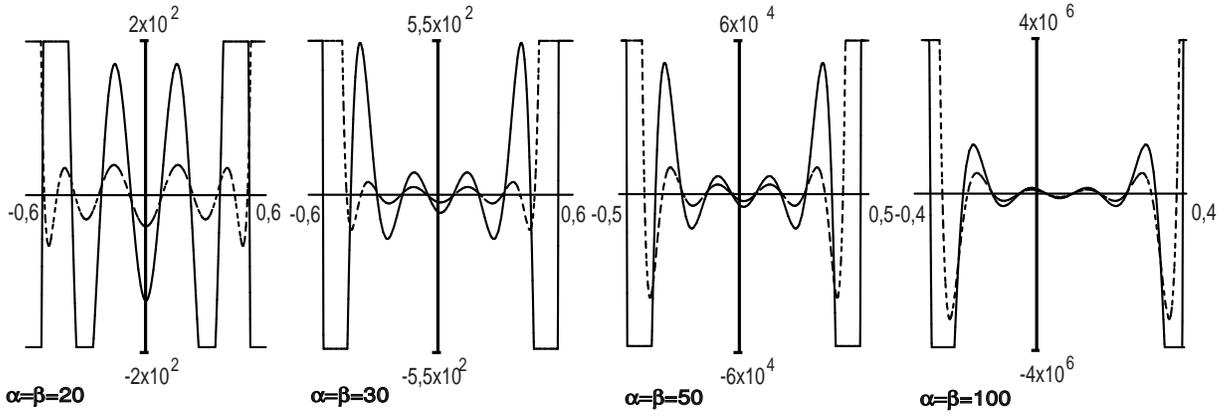


Figura 10: Aproximación obtenida con el primer término de (50) para $n = 10$. Las líneas continuas representan $p_{10}^{(\alpha, \beta)}(x)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

Para expresar el límite de los polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Hermite, realizamos el cambio de variable $x \rightarrow (\sqrt{2\alpha + 2\beta}x + \beta - \alpha)/(2 + \alpha + \beta)$ en (50) y obtenemos

$$\lim_{(\alpha+\beta) \rightarrow \infty} \frac{4z}{\sqrt{2\alpha + 2\beta}} = 1, \quad \lim_{(\alpha+\beta) \rightarrow \infty} \frac{\xi}{x} = 1.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, deducimos

$$\lim_{(\alpha+\beta) \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{\sqrt{2\alpha + 2\beta}} \right)^n j_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\sqrt{2\alpha + 2\beta}x + \beta - \alpha}{2 + \alpha + \beta} \right) = \frac{H_n(x)}{n!}. \quad (51)$$

3. Desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Charlier

Nuestro objetivo ahora es adecuar el método descrito anteriormente para obtener desarrollos asintóticos en términos de los polinomios de Hermite, al caso de los polinomios de Charlie. Es decir, buscamos desarrollos asintóticos de los polinomios del tercer nivel de la tabla de Askey en términos de los polinomios de Charlier.

Los polinomios de Charlier, cuya definición viene dada en términos de la función hipergeométrica

$$C_n(x, a) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{a} \right), \quad (52)$$

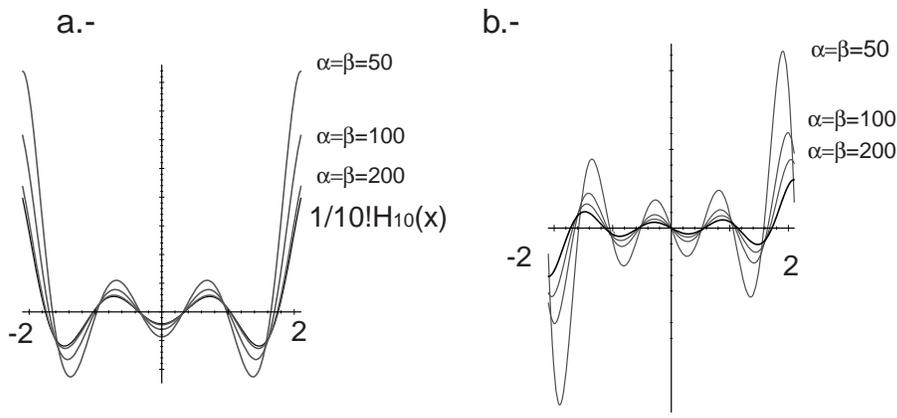


Figura 11: a.- Ilustra el límite (51) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (51) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

para $a > 0$ y $x \in \mathbf{N}$, son ortogonales con respecto a la medida discreta $a^x/x!$ y tienen la siguiente función generadora

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, a)}{n!} w^n, \quad a > 0, \quad (53)$$

que a su vez nos proporciona la siguiente integral de Cauchy

$$C_n(x, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x w^{-n-1} dw, \quad (54)$$

donde \mathcal{C} es un camino cerrado alrededor del origen dentro del dominio donde F es analítica.

Mediante el siguiente resultado, expresaremos polinomios ortogonales $p_n(x)$ como una suma finita de términos que dependen de polinomios de Charlier $C_n(x, C)$.

Teorema 3.1 Sean $p_n(x)$ polinomios definidos por la función generadora

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) w^n, \quad (55)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica en $w = 0$ y $F(x, 0) = 1$. Sea

$$F(x, w) = e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A f(x, w), \quad (56)$$

y $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$, la sucesión de coeficientes tales que

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k, \quad (57)$$

donde A y B no dependen de w . Entonces $p_n(x)$ puede representarse mediante

$$p_n(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (58)$$

donde $C_n(x, C)$ son los polinomios de Charlier de grado n y orden C .

Demostración. La representación integral de $p_n(x)$ dada en (54) se puede escribir como

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A \frac{f(x, w)}{w^{n+1}} dw. \quad (59)$$

Por otro lado, observemos que $F(x, w)$ es una función analítica con respecto a la variable w y, además, $f(x, w) = e^{-Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^{-A} F(x, w)$. Así pues, $f(x, w)$ es analítica y por lo tanto,

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k, \quad (60)$$

donde asumimos que $p_0(x) = 1$ (es decir, $c_0 = 1$).

Si sustituimos (60) en (59) obtenemos

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A w^{k-n-1} dw. \quad (61)$$

Puesto que los términos del sumatorio correspondientes a los índices k tales que $k-n-1 \geq 0$ son funciones analíticas en el interior del dominio de integración, entonces

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} c_k(x) e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A w^{k-n-1} dw = 0, \quad k \geq n+1. \quad (62)$$

Por último, teniendo en cuenta la representación integral (54) de los polinomios de Charlier y realizando un cambio de variable adecuado se deduce (58). ■

La elección de los parámetros A, B, C viene dada por las condiciones $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Obtenemos así,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4(p_1(x)^2 - p_2(x))^3}{(2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x))^2}, \\ B &= \frac{p_1(x)^2 p_2(x) - 2p_2(x)^2 + p_1(x)p_3(x)}{2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x)}, \\ C &= \frac{2(p_2(x) - p_1(x)^2)(p_1(x)^2 p_2(x) - 2p_2(x)^2 + p_1(x)p_3(x))}{(2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x))^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Observemos que el parámetro C depende de la variable x . Por tanto, en ese caso, obtendremos un desarrollo de $p_n(x)$ en términos de polinomios de Charlier con un orden dependiente de x . Evidentemente, ésta no va a ser una propiedad deseable a la hora de analizar algunas propiedades de los polinomios $p_n(x)$, como por ejemplo al investigar sus ceros; por ello, trataremos de evitarla. En primer lugar, tenemos la opción de fijar este parámetro tomando, por ejemplo, $C = a$ (haciendo así que el orden sea independiente de

x), y resolver el sistema dado por $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ para obtener los otros dos parámetros A y B . Otra opción a seguir es fijar dos parámetros y resolver la ecuación, $c_1 = 0$ para obtener el tercero.

Nuestro objetivo es analizar la naturaleza asintótica del desarrollo (58) para algún parámetro asintótico de los polinomios $p_n(x)$. Veremos que las propiedades asintóticas de los desarrollos obtenidos se derivan tanto del comportamiento de los coeficientes c_k como del carácter de los parámetros A , B y C en cada caso. Obtendremos desarrollos asintóticos tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (tres parámetros libres); o bien, $c_1 = c_2 = 0$ (dos parámetros libres); o bien, $c_1 = 0$ (un parámetro libre). Analizaremos los tres casos considerando los polinomios de Meixner, de Krawtchouk, de Meixner-Pollaczek y de Jacobi.

3.1. Polinomios de Meixner en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Meixner vienen dados por la función generadora

$$F(x, w) = \left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(x, \beta, c) w^n, \quad (64)$$

con $\beta > 0$ y $0 < c < 1$. Si escribimos como en (56)

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C}w\right)^A f(x, w), \quad (65)$$

con f definida de la misma manera que en (60), entonces el desarrollo (58) de los polinomios de Meixner en términos de los polinomios de Charlier es

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n n! \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (66)$$

donde los coeficientes c_k se derivan de (60) con la función $F(x, w)$ definida en (64).

3.1.1. TRES PARÁMETROS LIBRES

En este caso, resolvemos el sistema $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} A &= \frac{((1 - c^2)x - \beta c^2)^3}{(\beta c^3 + (c^3 - 1)x)^2}, \\ B &= -\frac{(c - 1)^2 x (\beta + x)}{\beta c^3 + (c^3 - 1)x}, \\ C &= \frac{(c - 1)^2 c x (\beta + x) ((1 - c^2)x - \beta c^2)}{(\beta c^3 + (c^3 - 1)x)^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Con esta elección, hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{(c-1)^2 x(\beta+x)}{4c^2((1-c^2)x - \beta c^2)}.$$

El resto de coeficientes c_k para $k > 4$, se puede obtener mediante la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (68)$$

donde

$$h_1 = \frac{-\beta c^2(1+2c) + (2+c-c^2-2c^3)x}{c(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, \quad h_3 = \frac{-\beta c^3 + x - c^3 x}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, \quad (69)$$

$$h_2 = \frac{\beta c^3(2+c) + (c-1)(1+c)^3 x}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, \quad h_4 = -\frac{(c-1)^2 x(\beta+x)}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}.$$

Esta relación se obtiene sustituyendo el desarrollo en serie de Maclaurin de f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -w^3(c-1)^2 x(\beta+x) f &= \\ &= (c-w)(w-1) \left[\beta c^3(w-1) + (c+c^3(w-1)-w)x \right] \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (65).

De forma sencilla, por inducción con respecto a k , podemos probar que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. En efecto:

- i) Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, es inmediato ver que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$.
- ii) Supongamos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ para todo $k \geq 4$. Por (69), $h_i = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ para cualquier valor de x . Por tanto, a partir de (68) concluimos

$$c_{k+1} = \mathcal{O}(\beta^0), \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$, $z = B = \mathcal{O}(\beta^0)$ y $A = \mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$, se deduce que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k / z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico dado por

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n-k}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$. Teniendo en cuenta esto y que $c_0 = 1$ y $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad \beta \rightarrow \infty,$$

donde hemos señalado el primer término, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados.

Observemos que de esta representación no podemos obtener un límite para $\beta \rightarrow \infty$. Sin embargo, sí que se obtiene un límite si establecemos la relación

$$c = \frac{a}{a + \beta}.$$

Para este caso, a partir de la recurrencia (68), se deduce que los coeficientes c_k tienen el comportamiento asintótico $c_k = \mathcal{O}(\beta^{k-1})$ para $\beta \rightarrow \infty$. Por otro lado, los parámetros en este caso, vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta(-a^2 + 2ax + \beta x)^3}{(-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x)^2}, \\ B &= \frac{\beta(a + \beta)x(\beta + x)}{-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x}, \\ C &= -\frac{a\beta(a + \beta)x(\beta + x)(a^2 - 2ax - \beta x)}{(-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x)^2}. \end{aligned} \tag{70}$$

Con estos valores obtenemos que

$$c_k/z^k = \mathcal{O}(\beta^{-1}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

y el desarrollo (82) se puede escribir

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, \frac{a}{a + \beta}) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{-1}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Tomando límites en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} A = x, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} C &= a, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{z^n}{(\beta)_n} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{B^n}{(\beta)_n} = 1, \end{aligned} \tag{71}$$

y obtenemos finalmente el límite ya conocido de la Tabla de Askey (ver Figura 12)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n(x, \beta, \frac{a}{a + \beta}) = C_n(x, a). \tag{72}$$

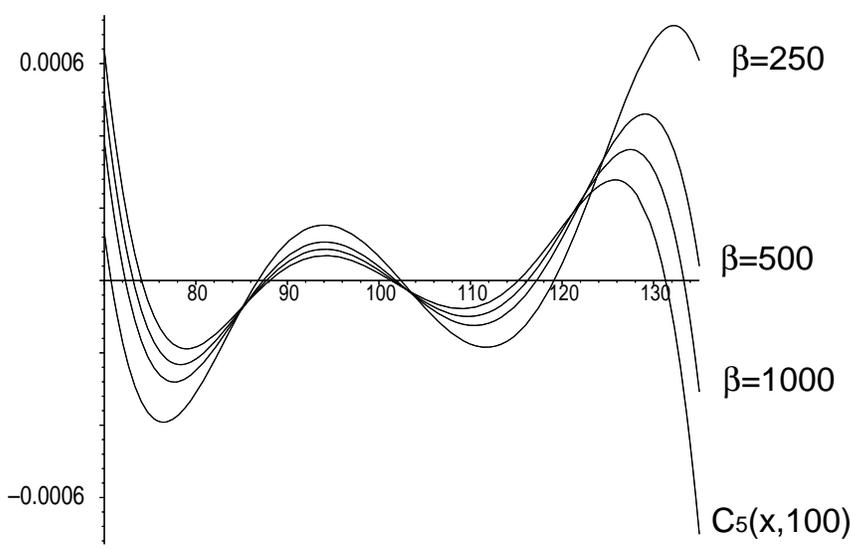


Figura 12: Límite (72) para $n = 5$.

3.1.2. DOS PARÁMETROS LIBRES

Ahora fijamos $B = 1$ y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ para obtener

$$A = \frac{(x - c(\beta + x - 1))^2}{(1 - c^2)x - \beta c^2}, \quad C = \frac{c(x - c(\beta + x - 1))}{\beta(1 - c^2)x - \beta c^2}.$$

Con esta elección comprobamos que los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{x(-1 + c^3 + x - 2cx + c^2x) + \beta(c^3 + x - 2cx + c^2x)}{3c^2(x - c(\beta + x - 1))}.$$

El resto se obtienen de la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (73)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{c - \beta c + c^2(1 - 2\beta - 2x) + 2x}{c(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_2 &= \frac{c^2(3\beta + 3x - 1) - x - 2cx}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_3 &= \frac{x - c^2(x - \beta)}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_4 &= \frac{x - c^2(x + \beta)}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ i_3 &= \frac{(x + \beta)(c^3 + x - 2cx + c^2x) - x}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}. \end{aligned} \quad (74)$$

Esta relación se obtiene al sustituir el desarrollo en serie de Maclaurin para la función f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & -w^2(w-1)x + (\beta+x) [c^3 + x - 2cx + c^2(x-w)]f = \\ & = (c-w)(w-1) [cx - wx + c^2(1 + \beta(w-1) - x + wx)] \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (65).

Por inducción con respecto a k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Como claramente $A = \mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$, concluimos que la sucesión $\{\phi_k\}$, definida por $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico dado por

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n-k}) \quad \beta \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, como $c_0 = 1$ y $c_1 = c_2 = 0$, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-3}), \quad \xi = A, \quad \beta \rightarrow \infty,$$

donde de nuevo hemos señalado el primer término, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados.

Como alternativa a la elección anterior, fijamos ahora el parámetro

$$C = aB$$

y resolvemos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = a^2 \left(\left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) x - \beta \right), \quad B = \beta - a\beta - \frac{(c-1)(ac+a-c)}{c^2} x.$$

Hemos comprobado que los primeros c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{x(c-c^3+a(c^3-1)) + \beta c^3(a-1)}{3ac^3},$$

mientras que el resto, como antes, se derivan de una relación de recurrencia.

La función $f(x, w)$ de (65) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + x\phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \beta \left((a-1)w - \log(1-w) + a^2 \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) \right), \\ \phi_2(w) &= \frac{w(c-1)(a-c+ac)}{c^2} - \log(1-w) - a^2 \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) + \log \left(1 - \frac{w}{c} \right), \end{aligned}$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\phi_1(w) = \beta w^3 \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \frac{w}{4} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \dots \right],$$

$$\phi_2(w) = w^3 \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) - \frac{1}{c^3} \right) + w \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) - \frac{1}{c^4} \right) + \dots \right].$$

Por el Lema 2.1, deducimos que la sucesión de coeficientes c_k tiene el orden $c_k = \mathcal{O}(\beta^{\lfloor k/3 \rfloor})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Considerando que C tiene el orden $\mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ si $a \neq 1$, observamos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\begin{cases} \phi_k = \mathcal{O}(\beta^{\lfloor k/3 \rfloor - k}), & \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{si } a \neq 1, \\ \phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n + \lfloor k/3 \rfloor - 2k}), & \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Así pues, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C/a, \quad (75)$$

para $\beta \rightarrow \infty$ si $a \neq 1$, y

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-5}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C, \quad (76)$$

para $\beta \rightarrow \infty$ si $a = 1$. Como siempre, hemos señalado el primer término del desarrollo, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados como se puede comprobar en la Figura (13).

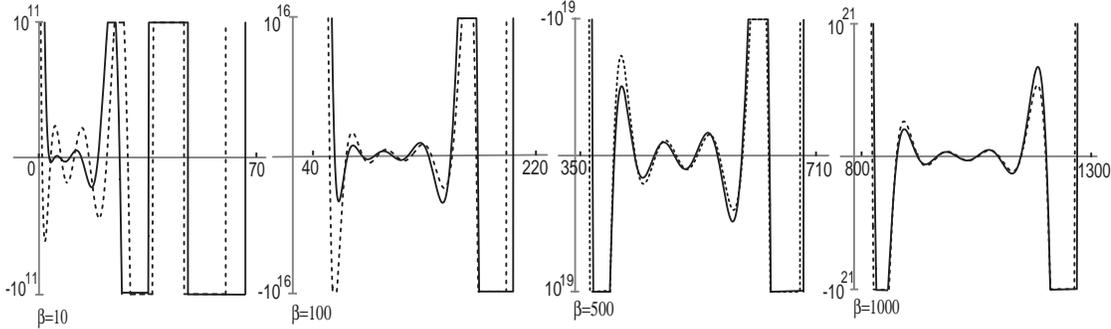


Figura 13: Aproximación (76) para $n = 10$. La línea discontinua representa $(\beta)_{10} M_{10}(x, \beta, c)$, la línea continua $z^{10} C_{10}(\xi, C)$

Si tomamos límites en (75), obtenemos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} z^{-n} (\beta)_n M_n(x, \beta, c) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_n(\xi, C) = (1 - a)^{-n}, \quad z = C/a, \quad a \neq 1, \quad (77)$$

y dado que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta)_n / z^n = 1/(1 - a)^n$ deducimos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n(x, \beta, c) = 1, \quad 0 < c < 1. \quad (78)$$

3.1.3. UN PARÁMETRO LIBRE

En esta ocasión, fijamos $B = 1$, $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ obteniendo

$$A = a \left(1 - \beta - x + \frac{x}{c} \right).$$

Ahora, la función $f(x, w)$ de (65) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \beta \left(a \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) - \log(1 - w) \right), \\ \phi_2(x, w) &= -w - x \log(1 - w) + a \left(-1 + x - \frac{x}{c} \right) \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) + x \log \left(1 - \frac{w}{c} \right), \end{aligned}$$

tienen los siguientes desarrollos de MacLaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \beta w^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \frac{w}{3} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \dots \right], \\ \phi_2(x, w) &= w^2 \left[\frac{1}{2a} + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{ac} \right) + \frac{w}{3} \left(\frac{1}{a^2} + x \left(1 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^2c} \right) \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1 tenemos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^{[k/2]})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Así pues, la naturaleza asintótica de la representación obtenida en (66) para grandes valores de β se deriva del hecho de que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n+[k/2]-k}), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y por lo tanto, podemos escribir

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = C_n(\xi, a) + \mathcal{O}(\beta^{n-1}), \quad \xi = A, \quad (79)$$

para $\beta \rightarrow \infty$.

3.2. Polinomios de Krawtchouk en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Krawtchouk vienen dados por la siguiente función generadora

$$F(x, w) = \left(1 - \frac{1-p}{p} w \right)^x (1+w)^{N-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} K_n(x, p, N) w^n, \quad (80)$$

con $N \in \mathbf{N}$ y $0 < p < 1$. Si escribimos como en (56)

$$\left(1 - \frac{1-p}{p} w \right)^x (1+w)^{N-x} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C} w \right)^A f(x, w), \quad (81)$$

con f definida igual que en (60), el desarrollo (58) de estos polinomios en términos de los polinomios de Charlier es

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (82)$$

donde los coeficientes c_k se siguen de (60) con $F(x, w)$ dada en (80).

3.2.1. TRES PARÁMETROS LIBRES

En primer lugar, resolvemos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ obteniendo así

$$\begin{aligned} A &= \frac{(Np^2 + x - 2px)^3}{(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)^2}, \\ B &= \frac{(p-1)(N-x)x}{Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x}, \\ C &= \frac{(1-p)p(N-x)x(Np^2 + x - 2px)}{(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Con esta elección hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{(p-1)^2 x(x-N)}{4p^2(Np^2 + x - 2px)},$$

mientras que el resto se obtienen de la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (84)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{Np^2(3p-1) + (-7p^2 + 7p - 2)x}{p(Np^2 + x - 2px)}, & h_2 &= \frac{Np^3(3p-2) - (2p-1)^3 x}{p^2(Np^2 + x - 2px)}, \\ h_3 &= \frac{(p-1)(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)}{p^2(Np^2 + x - 2px)}, & h_4 &= \frac{(p-1)^2 x(x-N)}{p^2(Np^2 + x - 2px)}. \end{aligned}$$

Esta relación resulta de sustituir el desarrollo de Maclaurin de f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^3(p-1)^2 x(x-N) f &= \\ &= (w+1)(p-w+pw) \left(Np^3(1+w) + (p-w+3pw - p^2(2+3w))x \right) \frac{df}{dw} \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (81).

Por inducción con respecto a k , utilizando la relación de recurrencia (84), comprobamos que $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$. Puesto que $A = \mathcal{O}(N)$ y $z = B = \mathcal{O}(N^0)$ cuando

$N \rightarrow \infty$, podemos concluir que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n-k}), \quad N \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto explica la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N , con x y n fijos:

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \left[\frac{C_{n-k}(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B,$$

para $N \rightarrow \infty$. El primer término de este desarrollo se puede utilizar para aproximar los polinomios de Krawtchouk para valores grandes de N .

En la representación anterior no podemos obtener un límite para $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, sí que obtenemos un límite si establecemos

$$p = a/N.$$

Con esta elección, de la relación de recurrencia (84) se deriva que los coeficientes c_k tienen nuevamente el comportamiento $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$ y los parámetros (83) vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{N(a^2 - 2ax + Nx)^3}{(a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x)^2}, \\ B &= \frac{(a - N)N(N - x)x}{a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x}, \\ C &= \frac{a(a - N)N(x - N)x(a^2 - 2ax + Nx)}{(a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x)^2}, \end{aligned} \tag{85}$$

por lo que observamos que $c_k/z^k = \mathcal{O}(N^{-k})$ para $N \rightarrow \infty$ y el desarrollo (82) para valores grandes de N , con x y n fijos es

$$\binom{N}{n} K_n(x, \frac{a}{N}, N) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B.$$

Tomando límites en la aproximación anterior

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} A = x, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} C &= a, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n! \binom{N}{n}} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{B^n}{n! \binom{N}{n}} = 1, \end{aligned} \tag{86}$$

obtenemos finalmente el límite del esquema de Askey (ver Figura 14)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_n(x, \frac{a}{N}, N) = C_n(x, a). \tag{87}$$

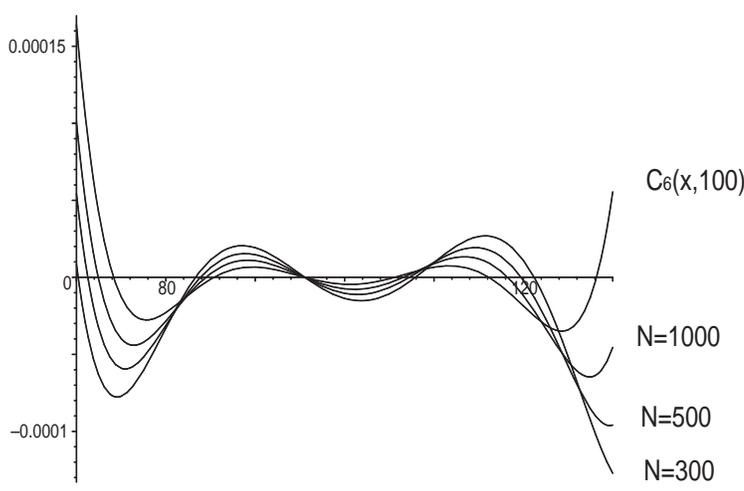


Figura 14: Límite (87) para $n = 5$.

3.2.2. DOS PARÁMETROS LIBRES

En este caso, fijamos $B = 1$ y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = \frac{(p - Np + x)^2}{Np^2 + x - 2px}, \quad C = \frac{p(p - Np + x)}{Np^2 + x - 2px}.$$

Hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{-N(p^3 + x - px) + x(1 + 3p^2 + x - p(x + 3))}{3p^2(-x + p(N - 1))}.$$

El resto de coeficientes se pueden calcular con la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (88)$$

donde

$$h_1 = \frac{(2 - 3N)p^2 - 2x + p(4x + N - 1)}{p((N - 1)p - x)},$$

$$h_2 = \frac{(1 - 3N)p^3 - p^2(1 - 2N - 5x) + x - 5px}{p^2((N - 1)p - x)},$$

$$h_3 = \frac{(p - 1)(Np^2 + x - 2px)}{p^2((N - 1)p - x)},$$

$$h_4 = \frac{(1 - p)(Np^2 + x - 2px)}{p^2((N - 1)p - x)},$$

$$i_3 = \frac{-N(p^3 + x - px) + x(1 + 3p^2 + x - p(3 + x))}{p^2((N - 1)p - x)}. \quad (89)$$

Nuevamente, esta relación se obtiene substituyendo el desarrollo de Maclaurin de la función f en la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & w^2 \{-N(-p^2w + p^3(1+w) + x - px) + \\ & + x(1+w + p^2(3+2w) + x - p(3+3w+x))\}f = \\ & = (w+1)(p-w+pw) \left(p^2(-1+N+Nw) + wx - p(x+2wx) \right) \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (81).

Por inducción con respecto a k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$ y considerando que $A = \mathcal{O}(N)$ obtenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n-k}) \quad N \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Teniendo en cuenta esto, deducimos que la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N , con x y n fijos viene dada por

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-3}), \quad \xi = A,$$

y el primer término es una buena aproximación de los polinomios de Krawtchouk debidamente escalados.

Como alternativa, fijamos

$$C = pB/(1-p)$$

y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = \frac{Np^2 + x - 2px}{(p-1)^2}, \quad B = \frac{x-N}{p-1}.$$

Hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{N-x}{3p},$$

y el resto se obtienen de la correspondiente relación de recurrencia.

La función $f(x, w)$ de (81) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{N\phi_1(w) + x\phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = \frac{1}{(p-1)^2} \left[(p-1)w + (p-1)^2 \log(w+1) - p^2 \log\left(1+w-\frac{w}{p}\right) \right],$$

$$\phi_2(w) = \frac{-1}{(p-1)^2} \left[(p-1)w + (p-1)^2 \log(w+1) - p^2 \log\left(1 + w - \frac{w}{p}\right) \right],$$

tienen las siguientes series de Maclaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= w^3 \left(\frac{1}{60p^4} \right) \left[20p^3 - 15w(-p^2 + 2p^3) - 12w^2(-p + 3p^2 - 3p^3) + \dots \right], \\ \phi_2(w) &= w^3 \left(\frac{-1}{60p^4} \right) \left[20p^3 - 15w(-p^2 + 2p^3) - 12w^2(-p + 3p^2 - 3p^3) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, $c_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/3 \rfloor})$. Por tanto, la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De esta manera, explicamos la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N :

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = \frac{(1-p)C}{p}, \quad (90)$$

cuando $N \rightarrow \infty$. En la Figura 15 podemos ver reflejada la aproximación que proporciona el primer término de (90).

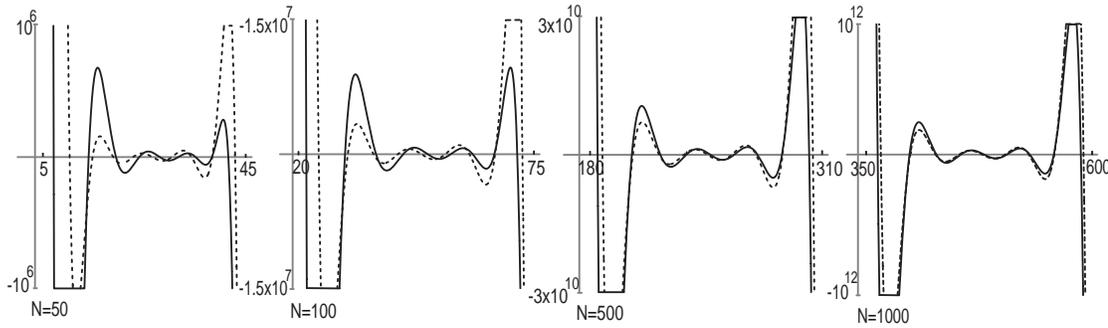


Figura 15: Aproximación (90) para $n = 10$. La línea discontinua representa $(\beta)_{10} M_{10}(x, \beta, c)$, la línea continua $z^9 C_9(\xi, C)/9!$

Si tomamos límites en (90), tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z^{-n} \binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} (p-1)^n, \quad z = \frac{(1-p)C}{p}, \quad (91)$$

y, considerando que $\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n}/z^n = (-1)^n (p-1)^n/n!$ obtenemos finalmente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_n(x, p, N) = 1, \quad 0 < p < 1. \quad (92)$$

3.2.3. UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos ahora $B = 1$ y $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ para obtener

$$A = \frac{a(p - Np + x)}{p}.$$

En este caso, la función $f(x, w)$ de (81) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{N\phi_1(w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = \log(1 + w) + a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right),$$

$$\phi_2(x, w) = -\frac{1}{p} \left(px \log(1 + w) + a(p + x) \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) + p \left(w - x \log\left(1 + w - \frac{w}{p}\right) \right) \right),$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\phi_1(w) = w^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{3} w \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \dots \right],$$

$$\phi_2(x, w) = w^2 \left[\frac{1}{2a} + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{(p-1)^2}{p^2} - \frac{1}{ap}\right) + \frac{w}{3} \left(\frac{1}{a^2} + x \left(\frac{(p-1)^3}{p^3} + \frac{1}{a^2 p} - 1 \right) \right) + \dots \right].$$

Por el Lema 2.1, concluimos que $c_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/2 \rfloor})$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por tanto, la naturaleza asintótica de la representación obtenida en (82), para valores grandes de N , se deriva del hecho de que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n + \lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y entonces

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-1}), \quad \xi = A.$$

3.3. Polinomios de Meixner-Pollaczec en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Meixner-Pollaczec vienen dados por la siguiente función generadora

$$F(x, w) = (1 - e^{i\phi w})^{-\lambda + ix} (1 - e^{-i\phi w})^{-\lambda - ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x, \phi) w^n, \quad (93)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < \phi < \pi$. Si escribimos como en (56)

$$(1 - e^{i\phi w})^{-\lambda + ix} (1 - e^{-i\phi w})^{-\lambda - ix} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C} w\right)^A f(x, w), \quad (94)$$

el desarrollo (58) para estos polinomios es

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k C_{n-k}(\xi, C)}{z^k (n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (95)$$

donde los coeficientes c_k se derivan de (60) con $F(x, w)$ definida en (93).

Si expresamos $x + i\lambda = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, $r \geq 0$, y consideramos el parámetro asintótico $r \rightarrow \infty$; los resultados que obtengamos se cumplirán uniformemente respecto a θ .

3.3.1. TRES PARÁMETROS LIBRES

Resolvemos el sistema $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))^3}{(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))^2} = -2r \frac{\sin^3(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)}, \\ B &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi)} = -2r \frac{\sin^2 \phi}{\sin(3\phi + \theta)}, \\ C &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi (\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))}{(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))^2} = -2r \frac{\sin^2 \phi \sin(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)}. \end{aligned} \quad (96)$$

Los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \\ c_4 &= -\frac{(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))} = -r \frac{\sin^2 \phi}{2 \sin(2\phi + \theta)}, \end{aligned}$$

mientras que el resto se derivan de la relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (97)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{\lambda \cos \phi + 2\lambda \cos(3\phi) + x(\sin \phi + 2 \sin(3\phi))}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -\frac{\sin(\phi + \theta) + 2 \sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_2 &= \frac{2\lambda \cos(2\phi) + \lambda \cos(4\phi) + 8x \cos^3 \phi \sin \phi}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = 2 + \frac{\sin(4\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_3 &= -\frac{\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi)}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -\frac{\sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_4 &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -2r \frac{\sin^2 \phi}{\sin(2\phi + \theta)}. \end{aligned}$$

Esta relación se obtiene sustituyendo la serie de Maclaurin de la función f en la ecuación diferencial

$$-w^3 2r \sin^2 \phi f = -\left(1 + w^2 - 2w \cos \phi\right) \left(-\sin(2\phi + \theta) + w \sin(3\phi + \theta)\right) \frac{df}{dw},$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (94).

En este caso, la función $f(x, w)$ de (94) tiene la forma

$$f(x, w) = e^{r\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

donde

$$\phi_1(w) = ie^{i\theta} \log \left(\frac{1 - we^{i\phi}}{1 - we^{-i\phi}} \right) + 2w \frac{\sin^2 \phi}{\sin(3\phi + \theta)} + \frac{\sin^3(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)} \log \left(1 - w \frac{\sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)} \right),$$

$$\phi_2(w) = 0,$$

y el desarrollo de Maclaurin de $\phi_1(x, w)$ es

$$\begin{aligned} \phi_1(w) = & w^4 \left(\frac{\sin^2 \phi}{60 \sin^3(2\phi + \theta)} \right) \{15 [-1 + \cos(2(2\phi + \theta))] + \\ & + 12w [-3 \cos \phi + \cos(3\phi + 2\theta) + 2 \cos(5\phi + 2\theta)] + \dots \}. \end{aligned}$$

Así, por el Lema 2.1 concluimos que $c_k = \mathcal{O}(r^{[k/4]})$ cuando $r \rightarrow \infty$, y considerando que $A = \mathcal{O}(r)$, $C = \mathcal{O}(r)$ y $z = B = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ obtenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{[k/4]-k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La naturaleza asintótica de la representación (95) para valores grandes de N , con x y n fijos queda reflejada mediante

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (98)$$

para $r \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a θ . Tomando límites en (98) obtenemos finalmente

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\lambda^{-n} P_n^{(\lambda)}(x, \phi) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{2^n}{n!} (2 \cos(2\phi) - 1)^n \cos^{2n} \phi \cos^{-n}(3\phi). \quad (99)$$

3.3.2. DOS PARÁMETROS LIBRES

Fijamos $B = 1$ y resolvemos $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = -\frac{(1 - 2r \sin(\phi + \theta))^2}{2r \sin(2\phi + \theta)}, \quad C = \frac{-1 + 2r \sin(\phi + \theta)}{2r \sin(2\phi + \theta)}.$$

Los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{2r(r - r \cos(2\phi) + \sin(3\phi + \theta))}{3(-1 + 2r \sin(\phi + \theta))},$$

mientras que el resto se obtiene de la relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (100)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \cos \phi - \frac{2r \sin(3\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, & h_3 &= \frac{2r \sin(2\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \\ h_2 &= \frac{-1 + 4r \sin(\phi + \theta) + 2r \sin(3\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, & h_4 &= -\frac{2r \sin(2\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \\ i_3 &= -\frac{2r(-r + r \cos(2\phi) - \sin(3\phi + \theta))}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \end{aligned} \quad (101)$$

Nuevamente, esta relación resulta de sustituir la serie de Maclaurin de la función f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^2 2r(r - r \cos(2\phi) - w \sin(2\phi + \theta) + \sin(3\phi + \theta)) f = \\ = (1 + w^2 - 2w \cos \phi) (1 - 2r \sin(\phi + \theta) + 2rw \sin(2\phi + \theta)) \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (94).

A través de la relación de recurrencia, por inducción con respecto de k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$. Puesto que $A = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$, tenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k / z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{n+1-k}), \quad r \rightarrow \infty,$$

uniformemente con respecto a θ , y para $k = 0, 1, 2, \dots$. La naturaleza asintótica de la representación obtenida en (95) queda reflejada por

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = \frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{n-2}), \quad \xi = A,$$

para $r \rightarrow \infty$, uniformemente respecto de θ .

Alternativamente, resolvemos ahora el sistema $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ B fijando

$$C = aB$$

y obtenemos

$$A = -2a^2r \sin(2\phi + \theta), \quad B = 2r (\sin(\phi + \theta) - a \sin(2\phi + \theta)).$$

Hemos comprobado que los primeros c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{2r (-\sin(2\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta))}{3a}.$$

Coefficientes de mayor grado vienen dados por la correspondiente relación de recurrencia.

Nuevamente, la función $f(x, w)$ de (94) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= ie^{i\theta} \log \left(\frac{1 - we^{i\phi}}{1 - we^{-i\phi}} \right) + \log \left(\sin \theta \frac{1 - we^{i\phi}}{1 - we^{-i\phi}} \right) - 2w \sin(\phi + \theta) + \\ &+ a \left[w + a \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) \right] \sin(2\phi + \theta), \end{aligned}$$

$$\phi_2(w) = 0,$$

y el desarrollo de Maclaurin de $\phi_1(w)$ es

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= rw^3 \left(\frac{1}{30a^2} \right) \left\{ 20a^3 [-\sin(2\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta)] + \right. \\ &\left. 15a^2w [-\sin(2\phi + \theta) + a^2 \sin(4\phi + \theta)] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1 tenemos que $c_k = \mathcal{O}(r^{[k/3]})$ cuando $r \rightarrow \infty$. Así, la naturaleza asintótica para valores grandes de r de la representación en (95) se deriva del hecho de que la sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{[k/3]-k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y entonces

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C/a, \quad (102)$$

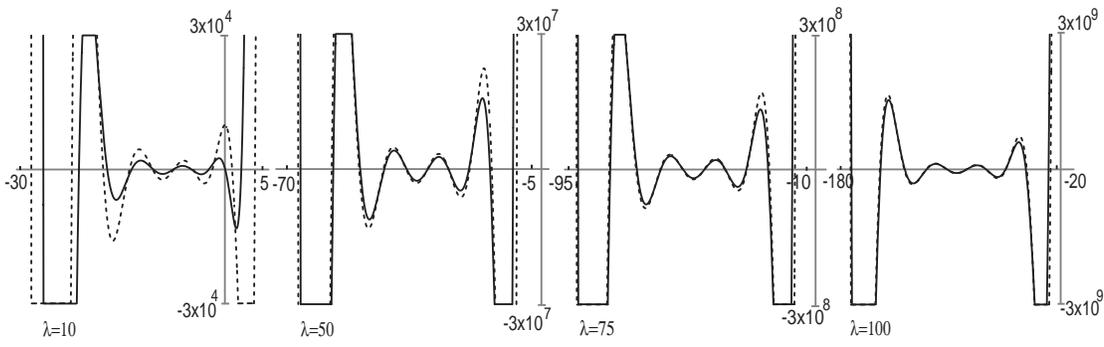


Figura 16: Aproximación (102) para $n = 10$. La línea discontinua representa $P_{10}^{(\lambda)}(x, \phi)$, la línea continua $z^{10}C_{10}(\xi, C)/10!$

para $r \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a θ . Por ello, el primer término de este desarrollo es una buena aproximación de los polinomios como se ilustra en la Figura 16.

Tomando límites en (102) obtenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} [z^{-n} P_n^{(\lambda)}(x, \phi)] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi - a \cos(2\phi)} \right)^n, \quad z = C/a. \quad (103)$$

3.3.3. UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos $B = 1$, $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ obteniendo

$$A = a(1 - 2r \sin(\phi + \theta)).$$

Expresamos ahora la función $f(x, w)$ de (94) como

$$f(x, w) = e^{r\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = ie^{i\theta} \log(1 - we^{i\phi}) - ie^{-i\theta} \log(1 - we^{-i\phi}) + 2a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) \sin(\phi + \theta),$$

$$\phi_2(w) = -w - a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right),$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) = w^2 \left(\frac{1}{3a^5} \right) \{ & 3a^4 [-\sin(\phi + \theta) + a \sin(2\phi + \theta)] + \\ & + 2a^3 w [-\sin(\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta)] + \dots \}, \end{aligned}$$

$$\phi_2(w) = w^2 \left(\frac{1}{a^5} \right) \left(\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^3w + \frac{1}{4}a^2w^2 + \frac{1}{5}aw^3 + \dots \right).$$

Por el Lema 2.1, tenemos que $c_k = \mathcal{O}(r^{\lfloor k/2 \rfloor})$ cuando $r \rightarrow \infty$, y considerando que $A = \mathcal{O}(r)$ concluimos en que $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{n+\lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y por lo tanto,

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}(r^{n-1}), \quad \xi = A,$$

para $r \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a θ .

3.4. Polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ están definidos por la función generadora

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)w^n, \quad R = \sqrt{1-2xw+w^2}, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (104)$$

con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$. Si escribimos como en (56)

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C}w \right)^A f(x, w), \quad (105)$$

con f definida en (60). El desarrollo (58) de los polinomios de Jacobi es

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B. \quad (106)$$

donde los coeficientes c_k se siguen de (60) con $F(x, w)$ dada en (104).

3.4.1. DOS PARÁMETROS LIBRES

Fijamos $C = B$ y resolvemos A y B con $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Obtenemos así

$$A = \frac{1}{4} \left(4 + \alpha + \beta - 2x(\alpha - \beta) + x^2(-8 - 3(\alpha + \beta)) \right),$$

$$B = -\frac{1}{4} (x - 1) (4 + \alpha + \beta + 2(\alpha - \beta) + x(8 + 3(\alpha + \beta))).$$

Los primeros coeficientes c_k están dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{1}{3} + \frac{\beta}{6} + \left(-1 - \frac{5\alpha}{12} - \frac{\beta}{12}\right)x + \left(\frac{-2}{3} - \frac{\beta}{2}\right)x^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{12}(\alpha + \beta)\right)x^3,$$

$$c_4 = \frac{1}{2} + \frac{7}{64}(-\alpha + \beta) + \frac{5}{16}(-\alpha + \beta)x + \left(-\frac{5}{2} - \frac{21}{32}(\alpha + \beta)\right)x^2 + \frac{5}{16}(\alpha - \beta)x^3 + \left(2 + \frac{35}{64}(\alpha + \beta)\right)x^4.$$

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico cuando $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ con $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. De este modo, tenemos que la función $f(x, w)$ de (105) se puede expresar como

$$f(x, w) = e^{\beta\phi_1(x, w) + \phi_2(x, w)},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(x, w) &= \frac{1}{4}w(x-1)(6x+2) + 2\log 2 + \frac{1}{4}(6x^2-2)\log(1-w) - \log\left((R+1)^2 - w^2\right), \\ \phi_2(x, w) &= w\left[-1 - \frac{3(\alpha-\beta)}{4} - x + 2x^2 + \frac{3(\alpha-\beta)x^2}{4}\right] + (\alpha-\beta)\log 2 + \\ &+ \left[-1 + 2x^2 + \frac{(\alpha-\beta)}{4}(-1 + 2x + 3x^2)\right]\log(1-w) - \log R - (\alpha-\beta)\log(1-w+R), \end{aligned}$$

tienen un desarrollo de Maclaurin de la forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x, w) &= w^3\left(\frac{1}{48}\right)\left[8(1-3x-3x^2+5x^3) + 15w(1-6x^2+5x^4) + \dots\right], \\ \phi_2(x, w) &= w^3\left(\frac{1}{960}\right)\left\{(x-1)\left[80(-4+(8+5(\alpha-\beta))x+(16+5(\alpha-\beta))x^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 15w(x+1)(-32+(-7+20(\alpha-\beta))x+(128+35(\alpha-\beta))x^2) + 12w^2(\dots) + \dots\right]\right\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, tenemos que $c_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{\lfloor k/3 \rfloor})$ para $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. La sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{\lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad \alpha + \beta \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

lo que explica la naturaleza asintótica de la representación (106) para valores grandes de $\alpha + \beta$:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}\left((\alpha + \beta)^{-2}\right) \right], \quad \xi = A, \quad z = C, \quad (107)$$

para $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. Por ello, el primer término de este desarrollo es una buena aproximación de los polinomio como nos muestra la Figura 17.

Finalmente, tomando límites obtenemos

$$\lim_{\alpha + \beta \rightarrow \infty} (\alpha + \beta)^{-n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \lim_{\alpha + \beta \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n. \quad (108)$$

que ilustramos en la Figura 18.

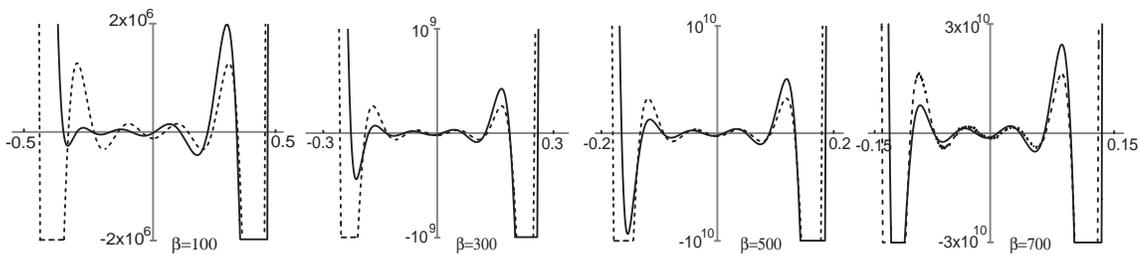


Figura 17: Aproximación (107) para $n = 10$. La línea discontinua representa $P_{10}^{(\alpha, \beta)}(x, \phi)$, la línea continua $z^{10}C_{10}(\xi, C)/10!$

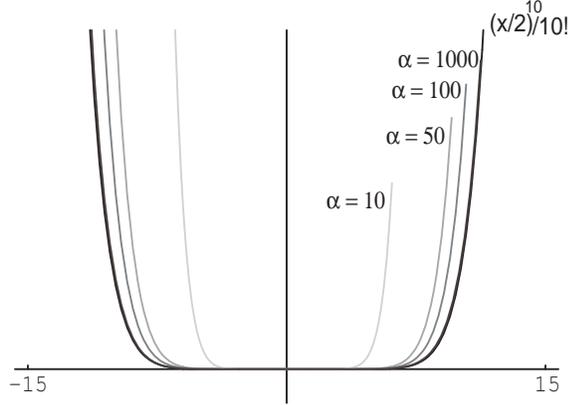


Figura 18: Límite (108) para diferentes $\alpha = \beta$ y $n = 10$ se representan $(\alpha + \beta)^{-n}P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ y $(x/2)^{10}/10!$.

3.4.2. UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos $B = 1$ y $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ para obtener

$$A = -\frac{1}{2}a(2(x-1) + \alpha - \beta + (\alpha + \beta)).$$

Los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4a}(\alpha - \beta) - \left(\frac{2}{a} - (\alpha - \beta) + \frac{1}{a}(\alpha + \beta)\right)\frac{x}{4} + \left(1 + \frac{3}{8}(\alpha + \beta)\right)x^2.$$

Nuevamente, analizamos la naturaleza asintótica para $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. La función $f(x, w)$ de (105) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\beta\phi_1(x, w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(x, w) = 2\log 2 + ax \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) - \log\left((R+1)^2 - w^2\right),$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x, w) &= -w + (\alpha - \beta) \log 2 + \left(x - 1 + \frac{(\alpha - \beta)(x + 1)}{2} \right) \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) \\ &\quad - \log R - (\alpha - \beta) \log (1 - w + R),\end{aligned}$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\begin{aligned}\phi_1(x, w) &= \frac{w^2}{96a^5} \left\{ -24a^5 + -48a^4x + 72a^5x^2 + w \left[(-32^3 - 48a^5)x + 80a^5x^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + w^2 \left[9a^5 - 24a^2x - 90a^5x^2 + 105a^5x^4 \right] + \dots \right\}, \\ \phi_2(x, w) &= \frac{w^2}{24a^5} \left\{ a^5 \left[-24 - 3(\alpha - \beta) + 6(\alpha - \beta)x + 24x^2 + 9(\alpha - \beta)x^2 \right] + \right. \\ &\quad + 6a^4 \left[2 - (\alpha - \beta) - (2 + (\alpha - \beta))x \right] + w \left[8a^3 - 4a^3(\alpha - \beta) - 2a^5(\alpha - \beta) + \right. \\ &\quad \left. + (-8a^3 - 24a^5 - 4a^3(\alpha - \beta) - 6a^5(\alpha - \beta))x + 6a^5(\alpha - \beta)x^2 + \right. \\ &\quad \left. + (32a^5 + 10a^5(\alpha - \beta))x^3 \right] + w^2 (\dots) + \dots \left. \right\}.\end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, concluimos que $c_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{\lfloor k/2 \rfloor})$. Por tanto, la sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n + \lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad (\alpha + \beta) \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y para valores grandes de $\alpha + \beta$ la naturaleza asintótica de (106), viene dada por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n-1}), \quad \xi = A,$$

para $(\alpha + \beta) \rightarrow \infty$.

Referencias

- [1] R. A. Askey, Orthogonal polynomials and special functions, *S.I.A.M., Philadelphia*, 1975.
- [2] T. S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials, *Gordon and Breach, New York*, 1978.

- [3] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, On the limit relations between classical continuous and discrete orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **91** (1998) 97-105.
- [4] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, Transverse limits in the Askey tableau, *J. Comp. Appl. Math.* **99** (1998) 327-335.
- [5] X. S. Jin and R. Wong, Uniform asymptotic expansions for Meixner polynomials, *Constr. Approx.* **14** (1998) 113-150.
- [6] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, Askey scheme or hypergeometric orthogonal polynomials, <http://aw.twi.tudelft.nl/koekoek/askey>,(1999)
- [7] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Providence, R.I., 1975.
- [8] J.L. López and N. M. Temme, Approximations of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials, *Meth. Appl. Anal.* **6** (1999) 131-146.
- [9] J.L. López and N. M. Temme, Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel and Buchholz polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **239** (1999) 457-477.
- [10] J.L. López and N. M. Temme, The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis, *J. Comp. Appl. Math.* **133** (2001) 623-633.
- [11] B. Rui and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Charlier polynomials, *Meth. Appl. Anal.* **1** (1994) 294-313.
- [12] Frenzen, C.L., and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988) 1232-1248.