

## 1. Aproximación asintótica de problemas de perturbación singular con condiciones de contorno discontinuas

La resolución efectiva de problemas de perturbación singular constituye un tema de gran interés en el ámbito de la Matemática Aplicada, debido a su estrecha relación con la modelización de una serie de fenómenos físicos, entre los que podemos señalar el transporte atmosférico o fluvial de contaminantes, la teoría de la elasticidad o la teoría de semiconductores y transistores. La característica fundamental de esta clase de problemas radica en la diferente magnitud que tienen los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales que rige el fenómeno, frente al coeficiente que acompaña al término de mayor orden de la misma, *parámetro de perturbación singular*, lo que provoca que en el caso límite, cuando dicho coeficiente se anula, se produzca una reducción del orden en dicha ecuación. Esta reducción del orden lleva consigo la imposibilidad para la solución del problema reducido de satisfacer alguna o todas las condiciones de contorno que se imponen en el problema original. Por ello, para valores pequeños del parámetro de perturbación, la solución del problema presenta un carácter multi-escala, existiendo zonas del dominio de integración donde ésta varía de forma suave, y otras, de tamaño generalmente reducido, que suelen situarse junto a las fronteras, en las que el problema reducido no verifica las condiciones de contorno del original, donde la variación es muy rápida. Esta peculiaridad en el tipo de soluciones teóricas, hace pensar que, en alguna medida, los métodos que empleemos para aproximarlas deberán presentar características especiales, que los hagan capaces de reflejar la forma de la solución exacta, cualesquiera que sean los valores de los parámetros de perturbación singular en el problema de contorno.

Dentro de los problemas de perturbación singular, existe una gran cantidad de problemas en física, ingeniería y otras ramas de las ciencias que vienen descritos por procesos de convección-difusión. Problemas de este tipo aparecen frecuentemente en dinámica de gases y fluidos [8,17,26], transferencia de calor [2,3], flujo hidrodinámico [5,20] u oceanografía [19]. Por ejemplo, la dinámica del movimiento de un contaminante en un medio líquido o gaseoso viene descrito por ecuaciones de este tipo. Cuando la convección es muy dominante frente a la difusión (baja difusividad del medio o corrientes convectivas muy fuertes), estas ecuaciones sufren del fenómeno de perturbación singular. Generalmente existen condiciones ambientales que fijan el valor o la dinámica del contaminante en alguna región (orillas de un río, paredes de un almacén, ...) y que se implementan en el problema matemático en forma de condiciones de contorno. Cuando esas condiciones son discontinuas (los valores de la contaminación sufren variaciones rápidas en el contorno de la región donde se mueve el contaminante), aparece una segunda fuente de comportamiento singular en la solución de las ecuaciones. Diseñar métodos analíticos que nos den la solución de dichas ecuaciones de forma aproximada ayudará a conocer la dinámica de esos contaminantes. La dificultad originada por este tipo de discontinuidades es un tema de reciente interés. No existen, sin embargo, muchos resultados teóricos ni numéricos sobre el estudio de problemas de perturbación singular con condiciones de contorno discontinuas. El efecto que estas discontinuidades tienen sobre el comportamiento singular de la solución ha constituido el tema central de esta línea de investigación.

Tal y como conjeturó N. Temme en [23, 24] y ha quedado demostrado en [6, 7, 22], la representación de las soluciones de problemas de perturbación singular en forma integral abre la extraordinaria posibilidad de aplicar toda la maquinaria de aproximación asintótica de integrales a problemas de perturbación singular definidos sobre dominios no acotados y de geometría sencilla (cuarto de plano, tira infinita, tira semiinfinita, ...). Por ejemplo, la solución de un problema de convección-difusión en un cuadrante del plano con coeficientes constantes singularmente perturbado y condición Dirichlet discontinua puede expresarse en forma integral. Entonces, métodos uniformes de aproximación asintótica permiten obtener el desarrollo asintótico de la solución en términos de la función de error más una serie asintótica en potencias del parámetro de la perturbación [9, 23]. Concretamente, el problema analizado en [9] es el siguiente:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta U + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U = 0, & (x, y) \in \Omega_1 = (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U(x, 0) = 0, U(0, y) = 1, & U \in \mathcal{C}(\tilde{\Omega}_1) \cap \mathcal{D}^2(\Omega_1), \end{cases} \quad (P_1)$$

donde el vector de convección  $\vec{v} = |\vec{v}|(\sin \beta, \cos \beta)$  es un vector constante y  $\tilde{\Omega}_1 \equiv \bar{\Omega}_1 \setminus \{(0, 0)\}$ . Observar que el problema presenta una condición de contorno tipo Dirichlet discontinua en la esquina del dominio  $(0, 0)$  (ver figura 1).

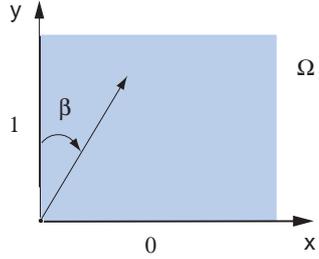


Figura 1: Dominio  $\Omega_1$  y condiciones de contorno en el problema  $(P_1)$ .

Tras el cambio de variable  $U(x, y) = F(x, y) \exp(\vec{v} \cdot \vec{r}/(2\varepsilon))$  donde  $\vec{r} \equiv (x, y)$ , el problema  $(P_1)$  se transforma en la ecuación de Helmholtz para  $F(x, y)$ :

$$\begin{cases} \Delta F - w^2 F = 0, & (x, y) \in \Omega_1, \\ F(x, 0) = 0, F(0, y) = e^{-wy \cos \beta}, & F \in \mathcal{C}(\tilde{\Omega}_1) \cap \mathcal{D}^2(\Omega_1), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $w \equiv |\vec{v}|/(2\varepsilon)$  es el nuevo parámetro asintótico. Bajo ciertas condiciones acerca del crecimiento de la función  $U(x, y)$  en infinito es posible demostrar que el problema anterior tiene solución única.

Aplicando la transformada seno en la variable  $y$  a la ecuación (1), obtenemos una representación integral exacta para la función  $F(x, y)$  válida para  $|\beta| < \pi/2$ :

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity \cos \beta - x \sqrt{w^2 + t^2 \cos^2 \beta}} \frac{t dt}{t^2 + w^2}.$$

Por tanto, la función  $U_\beta(x, y) \equiv e^{\vec{v} \cdot \vec{r}/(2\varepsilon)} F(x, y)$ , con  $F(x, y)$  definida anteriormente, es la solución de  $(P_1)$ . Tras el cambio de variable  $t \cos \beta = w \sinh u$  y usando coordenadas polares  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  con  $0 < r < \infty$  y  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ , la solución  $U_\beta(x, y)$  viene dada por

$$U_\beta(x, y) = \frac{e^{wr \cos(\beta - \phi)}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wr \cosh(u - i(\pi/2 - \phi))} \frac{\sinh u \cosh u du}{\sinh^2 u + \cos^2 \beta}. \quad (2)$$

Restringiendo el valor del ángulo  $\beta$  a  $0 \leq \beta < \pi/2$ , se observa que los polos del integrando en (2) están situados en los puntos  $u = i(\pi/2 \pm \beta) + in\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Si hacemos un desplazamiento en el camino de integración hasta  $\Im u = \pi/2 - \phi$ , sólo atravesamos el polo  $u = i(\pi/2 - \beta)$  si  $\phi < \beta$  y no cruzamos ningún polo si  $\phi > \beta$  (ver figura 2). Por otra parte, la parte real del exponente viene dada por  $-rw \cosh(\Re u) \sin(\phi + \Im u)$ . Usando ahora el teorema de los residuos de Cauchy y evaluando convenientemente los residuos, obtenemos la siguiente representación exacta para la solución de nuestro problema

$$U_\beta(x, y) = \chi_{(0, \pi/2)}(\beta - \phi) + \frac{1}{2} \delta_{\phi, \beta} + e^{wr \cos(\beta - \phi)} I(r, \phi, \beta), \quad (3)$$

donde

$$I(r, \phi, \beta) \equiv -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wr \cosh t} \frac{\sinh(t - i\phi) \cosh(t - i\phi) dt}{\cos^2 \beta - \cosh^2(t - i\phi)}. \quad (4)$$

Cuando  $\phi = \beta$ , esta integral debe ser entendida como valor principal.

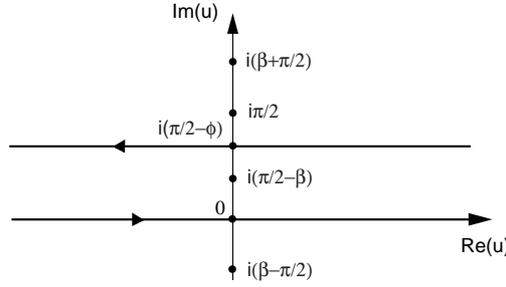


Figura 2: Polos del integrando en (2). Hay sólo un polo simple situado entre  $\Im u = 0$  and  $\Im u = \pi/2$ :  $u = i(\pi/2 - \beta)$ .

Para  $(x, y) \in \Omega_1^*$  (ver figura 3), las características asintóticas de la integral (4) son: (i) la función de fase  $\cosh t$  tiene un punto de silla correspondiente a  $\partial(\cosh t)/\partial t = 0$  en  $t = 0$ , (ii) los polos están localizados en  $\cos(\phi + it) = \cos \beta$ , (iii) el polo  $t = i(\phi - \beta)$ , que es el más cercano al eje real, se aproxima al punto de silla cuando  $\phi \rightarrow \beta$ . La aproximación asintótica de este tipo de integrales cuando  $w \rightarrow \infty$  viene dada por la aplicación de un método uniforme clásico aplicado a integrales en las que un polo y un punto de silla se aproximan y usa la función de error como aproximante básico. Así, la solución se puede aproximar por

$$U_\beta(x, y) = U_\beta^0(x, y) + \frac{e^{wr(\cos(\beta - \phi) - 1)}}{\pi \sqrt{2wr}} U_\beta^1(r, \phi), \quad (5)$$

donde

$$U_0^0(x, y) \equiv \operatorname{erfc}[\sqrt{w(r - y)}] \quad (6)$$

y

$$U_\beta^0(x, y) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{2wr} \sin \left( \frac{\phi - \beta}{2} \right) \right], \quad 0 < \beta < \pi/2. \quad (7)$$

La función  $U_\beta^1(r, \phi)$  admite el siguiente desarrollo asintótico

$$U_\beta^1(r, \phi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_k(\phi, \beta) \frac{\Gamma(k + 1/2)}{(2wr)^k}, \quad (8)$$

donde los coeficientes  $T_k(\phi, \beta)$  son funciones regulares de  $r$  y  $\phi$  para  $(r, \phi) \in \Omega_1^*$  e independientes de  $w$ .

Usando el comportamiento asintótico de la función de error complementaria y a partir de (5) y (8), se tiene que  $U_\beta(x, y) = U_\beta^0(x, y)(1 + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $r \geq r_0 > 0$  y por tanto, la aproximación de

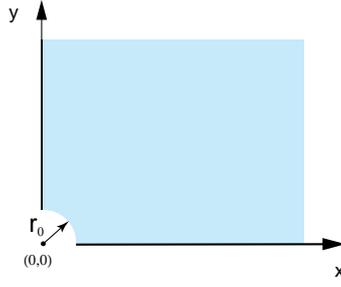


Figura 3: Región  $\Omega_1^* \equiv \Omega_1 \setminus D_{r_0}(0,0)$ , donde  $D_{r_0}(0,0)$  denota el círculo de radio  $r_0 > 0$  y centro  $(0,0)$ .

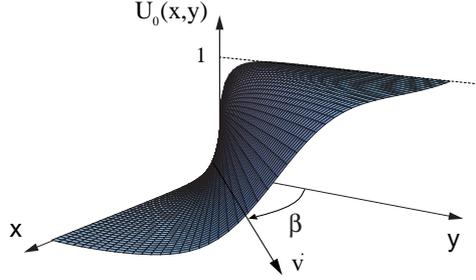


Figura 4: Gráfica de la aproximación de primer orden  $U_{\pi/4}^0(x,y)$  de la solución de  $(P_1)$  para  $\varepsilon = 0.1$  and  $\beta = \pi/4$ . El vector de convección  $\vec{v}$  arrastra la discontinuidad de la condición de contorno en  $(0,0)$  originando una capa parabólica a lo largo de la dirección  $\vec{v}$ .

primer orden viene dada por una función de error. Esta función de error presenta una capa límite interna de anchura  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  y líneas parabólicas de ecuación  $r - \vec{v} \cdot \vec{r} = C \cdot \varepsilon$  cerca de  $t\vec{v}$ ,  $t > 0$  (ver figura 4).

Hemos obtenido resultados análogos para una tira infinita [9], una tira semiinfinita [10] y un sector [11]. Estos resultados nos han hecho sospechar de un cierto carácter universal de la función de error como aproximante asintótico básico en este tipo de problemas. Este tipo de resultados y el carácter universal de la función de error como aproximante básico de problemas de convección-difusión con perturbación singular con condición Dirichlet discontinua puede extenderse también a dominios finitos, mucho más interesantes desde un punto de vista práctico, ya que es ahí donde están definidos los problemas físicos reales. La clave en la obtención de una solución explícita en los problemas mencionados en el párrafo anterior [9–11, 23, 24] es, además de ser problemas con coeficientes constantes, el carácter no acotado del dominio y su sencilla geometría, que permiten la aplicación de técnicas de transformadas integrales y de función de Green para obtener una representación explícita (mediante una integral) de la solución. En el caso de dominios finitos (de sencilla geometría) la situación es distinta: lo esperable no es una representación integral de la solución sino una representación en serie de Fourier que, además, presente una convergencia lenta en el límite asintótico. Las técnicas asintóticas para series no están tan desarrolladas como para integrales y no está claro que puedan aplicarse a esas series de Fourier para obtener el comportamiento asintótico de la solución del problema de convección-difusión con perturbación singular. Sin embargo, esa serie de Fourier de convergencia lenta puede transformarse en otra de convergencia rápida en el límite asintótico mediante la técnica de Poisson. Los sumandos de esta nueva serie son integrales y hemos obtenido que: i) los primeros términos de la serie constituyen una buena aproximación de la solución y ii) dichos términos (que son transformadas de Fourier) pueden aproximarse en el límite singular mediante las mismas técnicas asintóticas que hemos usado en [9], [10] ó [11]. Como había ocurrido en los ejemplos anteriores, también

en el caso del rectángulo la función de error vuelve a aparecer como aproximante básico [13].

Pero más todavía, la función de error, aproximante básico de la solución en los problemas mencionados anteriormente (dominios no acotados y acotados de geometría sencilla: cuarto de plano, tira infinita o semiinfinita, sector, rectángulo, ...), es también el aproximante asintótico en problemas definidos sobre cualquier dominio regular (acotado o no acotado). Dado que dicha función de error resulta ser solución exacta de la ecuación diferencial y verifica las condiciones de contorno de forma aproximada, la diferencia entre la solución exacta y dicha función de error es solución de un problema elíptico con una condición Dirichlet exponencialmente pequeña en el parámetro singular. Por tanto, el principio del máximo nos permite demostrar que la diferencia entre la solución exacta y la función de error es exponencialmente pequeña y, por tanto, dicha función de error es también aproximante básico de la solución del problema en dominios regulares con cualquier tipo de geometría. El estudio de este tipo de problemas permite obtener el desarrollo asintótico de su solución y entender el grado de universalidad de la función de error como aproximante fundamental en problemas de convección-difusión singularmente perturbados con condiciones de contorno discontinuas.

Los desarrollos asintóticos mencionados en los párrafos anteriores, sea cual sea el dominio del problema, no son válidos en las proximidades de la discontinuidad de la frontera. Tal y como hemos demostrado en [9–11, 13], en esas zonas se hace necesario un estudio asintótico completamente diferente basado en la técnica distribucional de Wong [27]. En esta zona el parámetro asintótico ya no es el parámetro singular, sino la distancia al punto de discontinuidad. Concretamente, para el problema  $(P_1)$ , el desarrollo asintótico dado en (8) no es válido cuando  $r \rightarrow 0^+$ . La aproximación asintótica de  $U_\beta(x, y)$  cerca del punto  $(0, 0)$  y con  $\varepsilon$  acotado ( $r \rightarrow 0^+$ ,  $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ ) requiere un análisis completamente distinto. El cambio de variable  $\cosh t = u + 1$  en (4) en la integral  $I(r, \phi, \beta)$  proporciona una representación alternativa de la solución de la forma

$$I(r, \phi, \beta) = \frac{e^{-wr}}{\pi} \int_0^\infty e^{-wru} f(u, \phi, \beta) du, \quad (9)$$

donde

$$f(u, \phi, \beta) = \left[ \cos(2\beta) \left( 1 + \frac{2}{u} \right) + \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}{u^2} \right] \frac{g(u)}{\sin(2\beta)},$$

con

$$g(u) \equiv \frac{\sin(2\phi) \sin(2\beta)}{u^3 \sqrt{1 + \frac{2}{u}} \left( 1 + \frac{1+s_+}{u} \right) \left( 1 + \frac{1-s_+}{u} \right) \left( 1 + \frac{1+s_-}{u} \right) \left( 1 + \frac{1-s_-}{u} \right)}$$

y  $s_\pm \equiv \cos(\phi \pm \beta)$ . Para obtener un desarrollo asintótico uniforme de la integral  $I(r, \phi, \beta)$  en (9) cuando  $wr \rightarrow 0^+$ , es necesario aplicar un método distribucional (Laplace cerca del origen [27, cap. 6, p. 321]). En este caso

$$U_\beta(x, y) = 1 - \frac{2\phi}{\pi} + \frac{rw}{\pi} e^{wr(\cos(\beta-\phi)-1)} U_\beta^1(r, \phi), \quad (10)$$

donde

$$U_\beta^1(r, \phi) \equiv \frac{T_0}{rw} (1 - e^{wr(1-\cos(\beta-\phi))}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} [T_k - V_k \log(rw)] (rw)^{k-1}, \quad (11)$$

$V_1 = 0$  y los coeficientes  $V_k$  y  $T_k$  son funciones regulares de  $r$  y  $\phi$ .

De (10) y (11) se deduce que, cerca de la discontinuidad,

$$U_\beta(x, y) = 1 - \frac{2\phi}{\pi} + \mathcal{O}(r), \quad r \rightarrow 0^+, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Por tanto, la discontinuidad en  $(0,0)$  es suavizada en sus proximidades por una función lineal del ángulo  $\phi$  entre  $\vec{r}$  y el eje  $y$  independientemente de  $\vec{v}$  (ver figura 5).

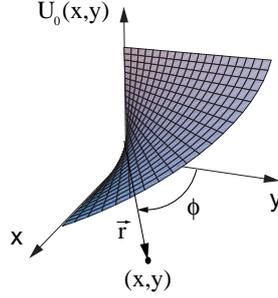
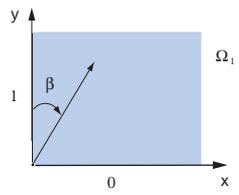
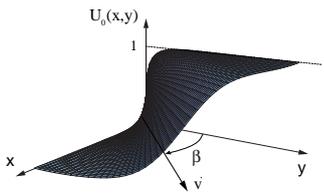
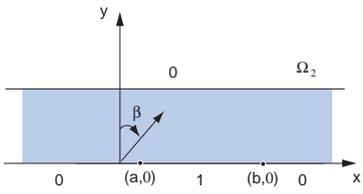
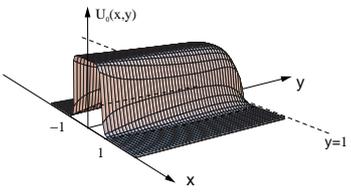
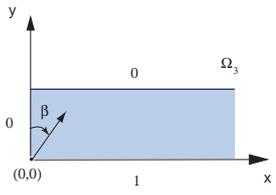
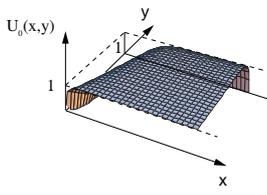
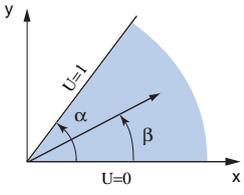
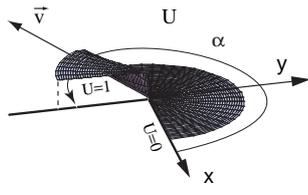
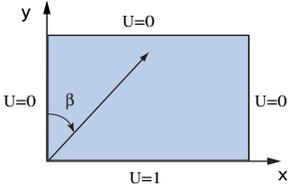
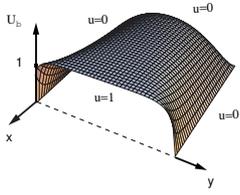


Figura 5: Gráfica de la aproximación de primer orden,  $1 - 2\phi/\pi$ , de la solución de  $(P_1)$  cerca del punto de discontinuidad  $(0,0)$  para  $\varepsilon = 0.1$  and  $\beta = \pi/4$ .

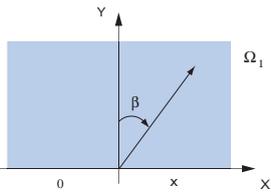
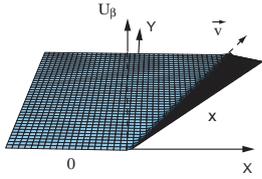
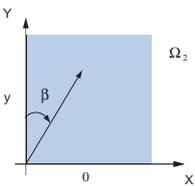
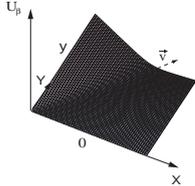
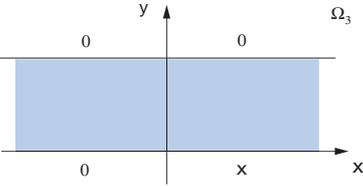
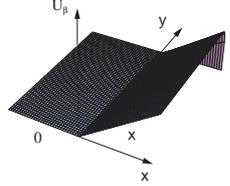
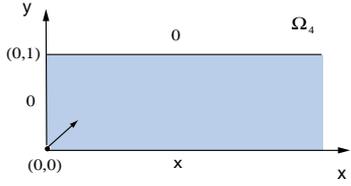
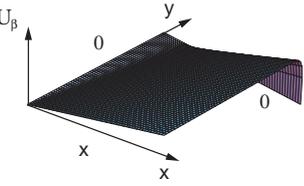
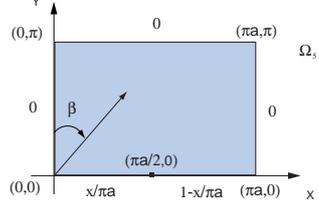
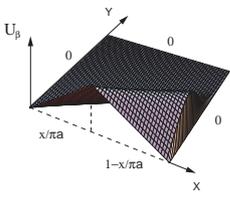
Un análisis similar ha sido realizado sobre otros dominios no acotados y acotados, pero con condiciones de contorno Dirichlet discontinuas en las derivadas (ver tabla 2). La diferencia principal entre los problemas con discontinuidades de tipo  $\mathcal{C}^0$  y los problemas con discontinuidades de tipo  $\mathcal{C}^1$  radica en el hecho de que las integrales que aparecen como solución de estos últimos problemas tienen la particularidad de poseer polos dobles que se aproximan a un punto de silla, mientras que en el caso de discontinuidades de tipo  $\mathcal{C}^0$  estos polos eran simples. Esta diferencia se traduce en que el aproximante básico para este tipo de problemas no es la función de error, como sucedía en los problemas anteriores, sino la primera integral iterada de la función de error [12].

Finalmente, y como un paso más en el estudio de problemas de convección-difusión singularmente perturbados con condiciones Dirichlet discontinuas, hemos analizado problemas similares pero en tres dimensiones (ver tabla 3), muy poco estudiados hasta el momento. En este caso, la solución exacta del problema viene dada por una integral doble y no por una integral simple, como sucedía en el caso dos dimensional. Usando el método del saddle point para integrales dobles se obtiene que el papel desempeñado por la función de error en el caso dos dimensional es reemplazado por una generalización de la función de error [14]. Un método alternativo, basado en el conocimiento del comportamiento asintótico de un problema similar en dos dimensiones ha sido desarrollado en [15, 16]. Allí se muestra que la principal contribución de los datos discontinuos a la forma de la solución está contenida en una combinación finita de productos de dos funciones de error.

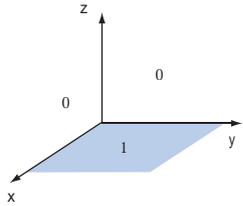
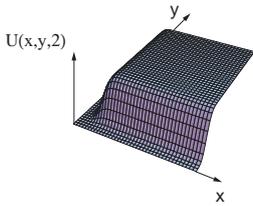
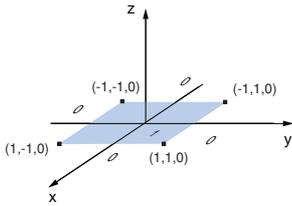
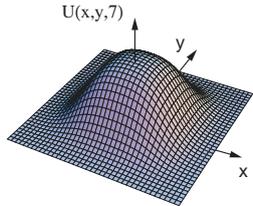
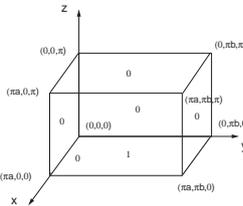
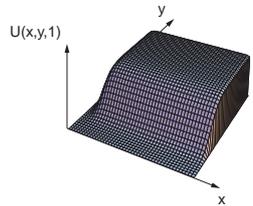
La identificación de la solución aproximada de estos problemas como una combinación de funciones de error puede ser útil en el diseño de métodos numéricos estables para un problema más general. En la construcción de mallas locales, los argumentos de estas funciones pueden dar una idea sobre el tamaño y localización de mallas refinadas [21].

DOMINIOS	APROXIMANTE	GRÁFICAS
	<p>una función de error</p>	
	<p>combinación de 4 funciones de error, func. exponenciales y func. características</p>	
	<p>combinación de 2 funciones de error, func. exponenciales y func. características</p>	
	<p>una función de error y/o combinación de func. exponenciales</p>	
	<p>combinación de 3 funciones de error, func. exponenciales y func. características</p>	

Cuadro 1: Problemas de convección-difusión singularmente perturbados con condiciones de contorno discontinuas en los datos Dirichlet.

DOMINIOS	APROXIMANTE	GRÁFICAS
	<p>una primitiva de la función de error: ierfc</p>	
	<p>una primitiva de la función de error: ierfc</p>	
	<p>combinación de 2 funciones ierfc y func. exponenciales</p>	
	<p>combinación de 2 funciones ierfc y func. exponenciales</p>	
	<p>combinación de 5 funciones ierfc y func. exponenciales</p>	

Cuadro 2: Problemas de convección-difusión singularmente perturbados con condiciones de contorno discontinuas en las derivadas.

DOMINIOS	APROXIMANTE	GRÁFICAS
	<p>un producto de dos funciones de error</p>	
	<p>combinación de 4 productos de dos funciones de error</p>	
	<p>combinación de 4 productos de dos funciones de error</p>	

Cuadro 3: Problemas de convección-difusión tres dimensionales singularmente perturbados con condiciones de contorno discontinuas.

## Referencias

[1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub., New York, 1972.

[2] A. AZIZ AND T. Y. NA, *Perturbation Methods in Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.

[3] A. BEJAN, *Convection Heat Transfer*, John Wiley, New York, 1984.

[4] W. ECKHAUS, *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[5] R. R. GOLD, Magnetohydrodynamic pipe flow. Part I, *J. Fluid Mech.*, **13** (1962), 505-512.

[6] J. GRASMAN, On singular perturbations and parabolic boundary layers, *J. Eng. Math.*, **2(2)** (1968), 163-172.

[7] G. W. HEDSTROM AND A. OSTERHELD, The effect of cell Reynolds number on the computation of a boundary layer, *J. Comput. Phys.*, **37** (1980), 399-421.

[8] J. KEVORKIAN, J.D. COLE, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[9] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, Asymptotic expansions for two singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous data: the quarter plane and the infinite strip. *Stud. Appl. Math.*, **113(1)** (2004), 57-89.

- [10] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, Analytic approximation for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a half-infinite strip. *Acta Appl. Math.*, **82(1)** (2004), 101-117.
- [11] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, Asymptotic Approximations for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a sector. *J. Comp. Appl. Math.*, **181** (2005), 1-23.
- [12] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, Asymptotic approximation of singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous derivatives of the Dirichlet data. *Q. Appl. Math.*, **63** (2005), 527-543.
- [13] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, The role of the error function in a singularly perturbed convection-diffusion problem in a rectangle with corner singularities. *P. Roy. Soc. Edinb. A*, **137A**, (2007) 93-109.
- [14] J.L. LÓPEZ, E. PÉREZ SINUSÍA AND N.M. TEMME, First order approximation of an elliptic 3D singular perturbation problem. *Stud. Appl. Math.*, **116** (2006), 303-319.
- [15] J.L. LÓPEZ, E. PÉREZ SINUSÍA AND N.M. TEMME, Asymptotic behaviour of three-dimensional singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous data. *J. Math. Anal. Appl.*, **328(2)** (2007), 931-945.
- [16] J.L. LÓPEZ AND E. PÉREZ SINUSÍA, A singular perturbation problem with discontinuous data in a cuboid. *IMA. J. Appl. Math.*, (2008), en prensa
- [17] P.-C. LU, *Introduction to the Mechanics of Viscous Fluids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1973.
- [18] E. PÉREZ SINUSÍA, *Asymptotic Approximations for singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous boundary data*, Ph. D thesis, Universidad Pública de Navarra, 2005.
- [19] A.R. ROBINSON, *Wind Driven Ocean Circulation*, Blaisdall Publ. Co., 1963.
- [20] J. A. SHERCLIFF, Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 136-144.
- [21] S.-D. SHIH AND Y.-K. TUNG, Internal layers of a transient convection-diffusion problem by perturbations methods, *Adv. Water Resour.*, **18(2)** (1995), 111-120.
- [22] S.-D. SHIH, A novel uniform expansion for a singularly perturbed parabolic problem with corner singularity, *Meth. Appl. Anal.*, **3(2)** (1996), 203-227.
- [23] N.M. TEMME, Analytical methods for a singular perturbation problem. The quarter plane, *C.W.I. Report*, **125** (1971).
- [24] N.M. TEMME, Analytical methods for a singular perturbation problem in a sector, *SIAM J. Math. Anal.*, **5(6)** (1974), 876-887.

- [25] N.M. TEMME, *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*, Wiley and Sons, New York , 1996.
- [26] M. VAN DYKE, *Perturbation Methods in Fluid Dynamics*, Academic Press, New York, 1964.
- [27] R. WONG, *Asymptotic approximations of integrals*, Academic Press, New York, 1989.