

**Un paseo por la metodología aplicada para
obtener desarrollos asintóticos entre polinomios
de la tabla de Askey**

Nivel superior $\rightarrow$ Nivel inferior

© Grupo de investigación en Teoría de la Aproximación Asintótica

La tabla completa de Askey

Información en <http://aw.twi.tudelft.nl/koekoek/askey>

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

Desarrollos y límites en términos de niveles inferiores

El objetivo es obtener desarrollos asintóticos de los polinomios de los niveles superiores en términos de los polinomios de niveles inferiores:

- Laguerre y Charlier $\rightarrow$ Hermite
- Meixner-Pollaczek, Jacobi, Meixner, Krawtchouk $\rightarrow$ Laguerre, Charlier y Hermite
- Continuous Dual Hahn, Continuous Hahn, Hahn, Dual Hahn $\rightarrow$ Meixner-Pollaczek, Jacobi,..., Hermite
- Wilson y Racah $\rightarrow$ Continuous Dual Hahn, Continuous Hahn, ..., Hermite

Además, esta aproximación la construiremos de forma que alguno/os de los parámetros del polinomio de nivel superior, sea el/los parámetros asintóticos (valores grandes, o pequeños). A partir de la aproximación asintótica, podremos extraer límites (algunos conocidos) de utilidad.

La obtención de estos desarrollos asintóticos se basa en el conocimiento de la función generadora de los polinomios, y por ello, se diferencia de otras técnicas, algunas más sofisticadas, presentadas por otros autores como Godoy, Ronveaux, Zarzo, Area, Rui, Wong y Frenzen

Ejemplo: polinomios de Meixner en términos de Charlier

Veamos un ejemplo de aproximación:

Meixner $\rightarrow$ Charlier

Se tiene la siguiente relación asintótica para β grande:

$$M_n(x, \beta, c) = \frac{B^n n!}{(\beta)_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{B^k} \frac{C_{n-k}(X, A)}{(n-k)!}$$

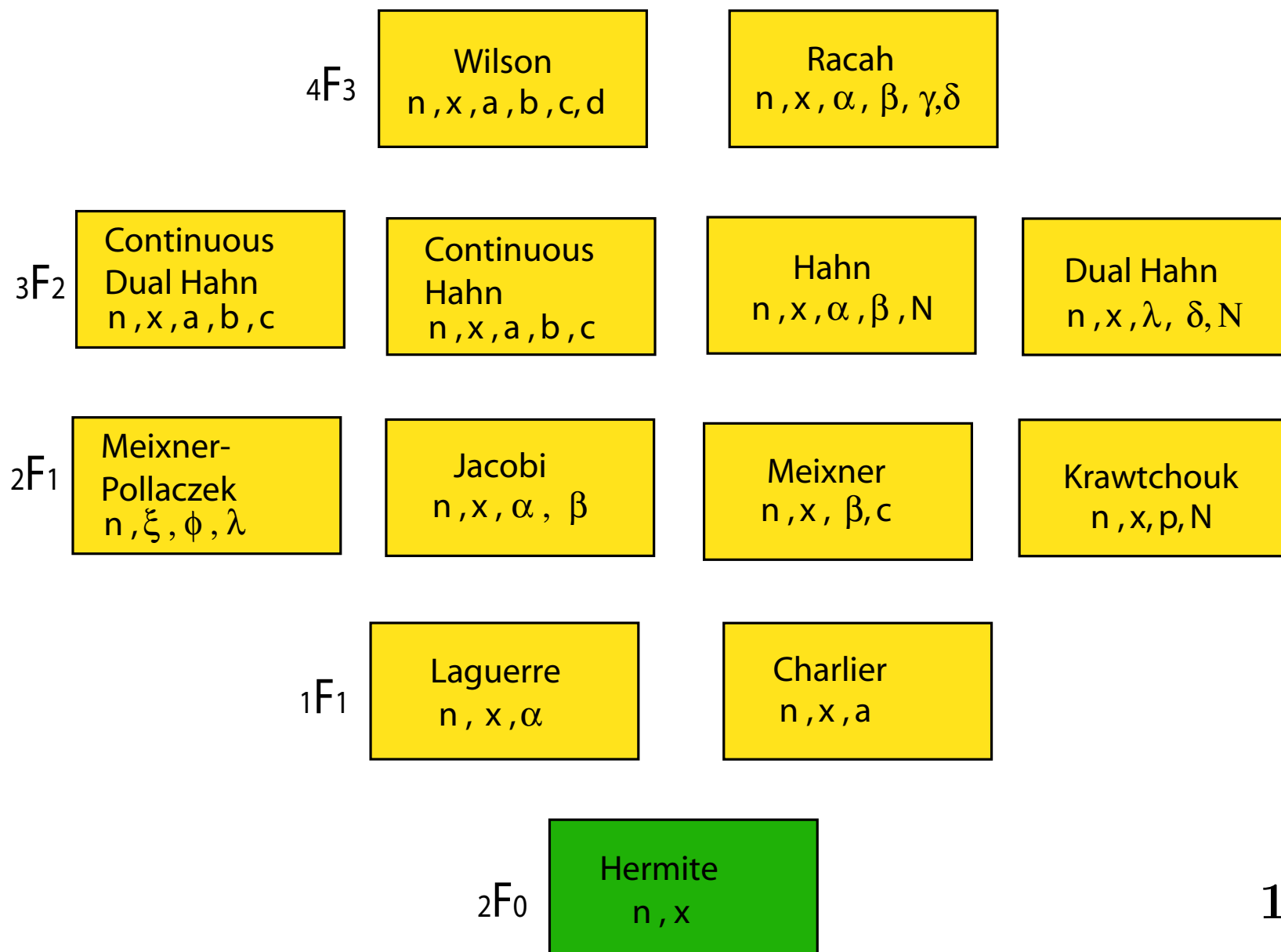
¿Cuál es el carácter asintótico de la sucesión anterior?:

$$\frac{c_k}{B^k} C_{n-k}(X, A) = \mathcal{O}(\beta^{n-k}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

A partir del desarrollo, obtenemos el siguiente límite:

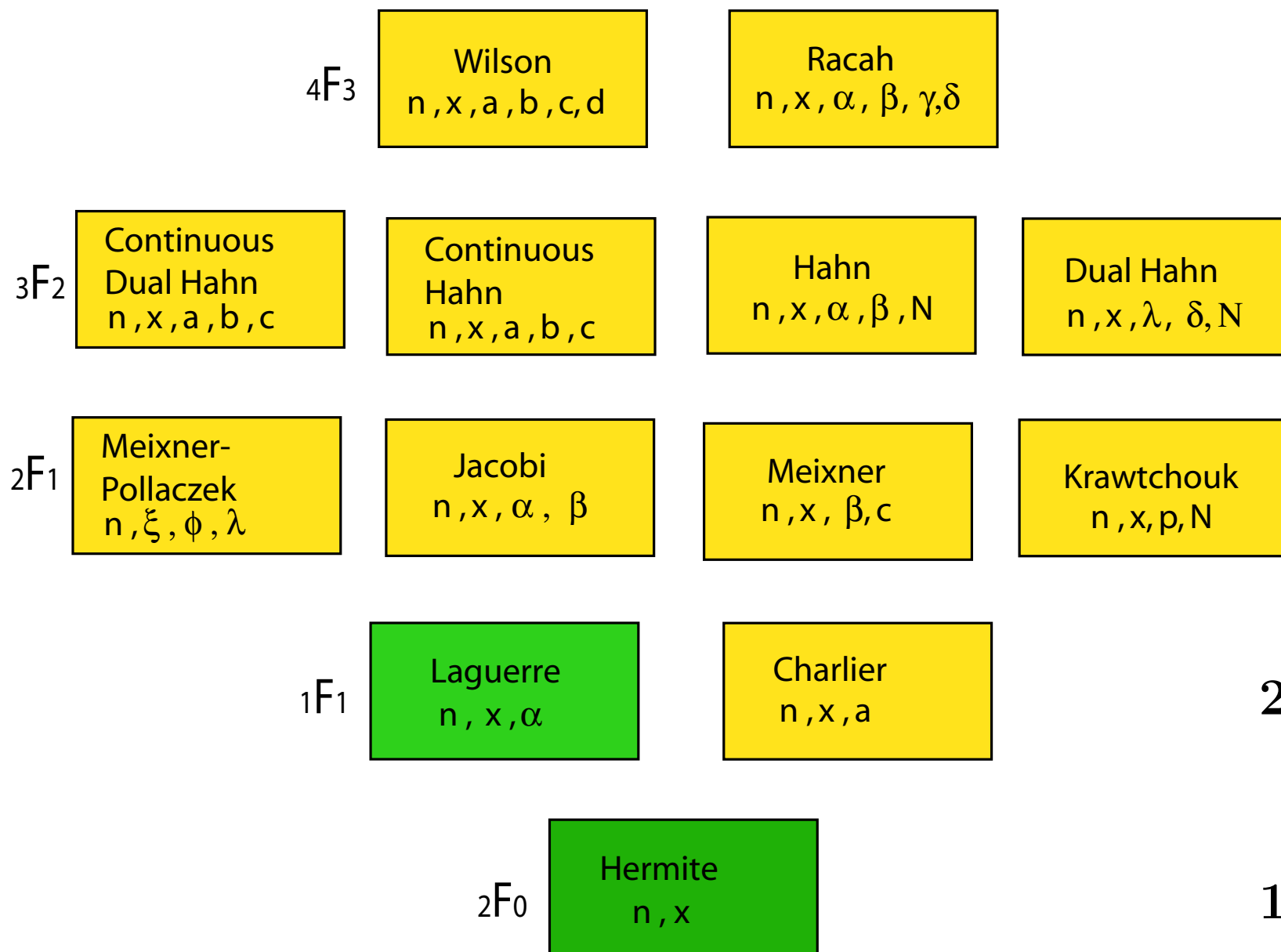
$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n \left(x, \beta, \frac{a}{a + \beta} \right) = C_n(x, a)$$

Cronología de los resultados obtenidos hasta ahora



1999

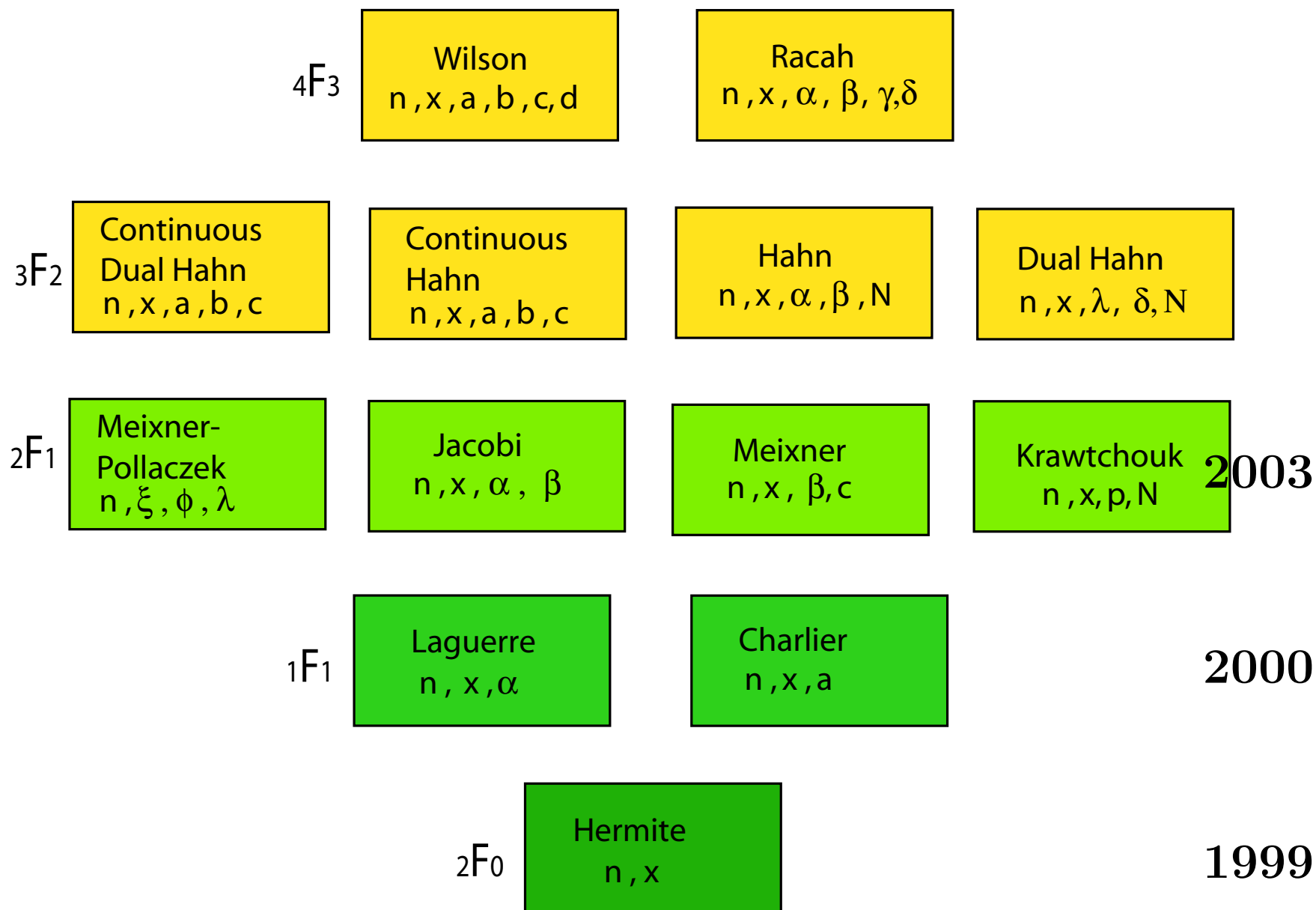
Cronología de los resultados obtenidos hasta ahora



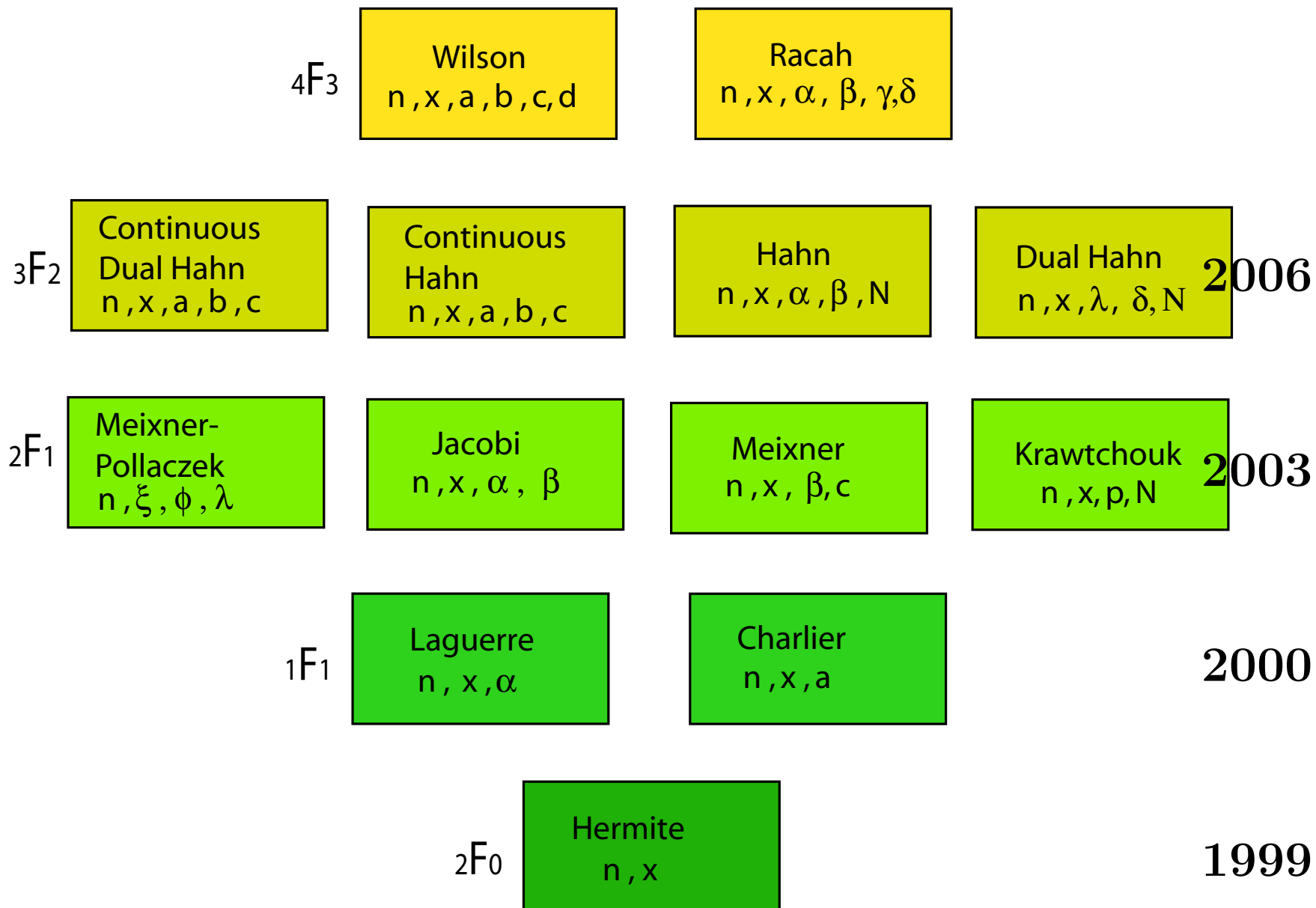
2000

1999

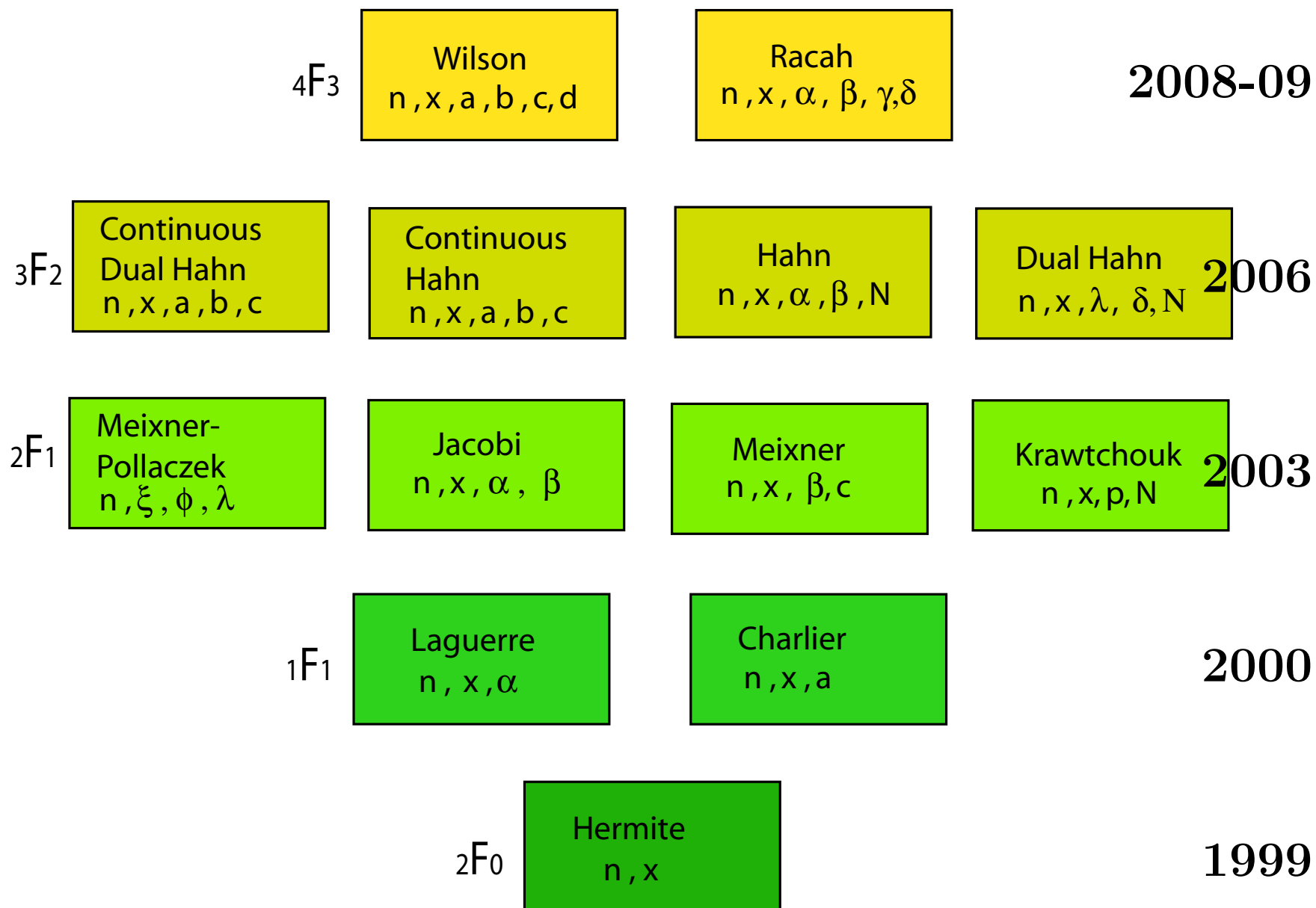
Cronología de los resultados obtenidos hasta ahora



Cronología de los resultados obtenidos hasta ahora



Cronología de los resultados obtenidos hasta ahora



Explicación de la técnica

Supongamos que queremos obtener la aproximación de un polinomio de nivel superior (sea por ejemplo Wilson) con respecto a uno de nivel inferior.

A partir de la función generadora ($F(\boldsymbol{x}, w)$) de cada polinomio ($p_n(\boldsymbol{x})$), utilizando la fórmula integral de Cauchy para los elementos de la serie tenemos:

- Polinomio de tipo Wilson (nivel superior):

$$p_n^{\text{W}}(\boldsymbol{x}) : F^{\text{W}}(\boldsymbol{x}, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\text{W}}(\boldsymbol{x}) w^n \rightarrow p_n^{\text{W}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F^{\text{W}}(\boldsymbol{x}, w) \frac{dw}{w^{n+1}}$$

- Polinomio de un nivel inferior (denominamos aproximante básico):

$$p_n^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}) : F^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}) w^n \rightarrow p_n^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}, w) dw}{w^{n+1}}$$

Explicación de la técnica

La idea es establecer una relación entre las funciones generadoras de ambos polinomios:

“**matching**”: $F^w(\mathbf{x}, w) = F^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x}), w) \underbrace{f(\mathbf{x}, w)}$

analítica como función de $w \sim \underbrace{(c_0(\mathbf{x}) + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots)}_{=1}$

Una vez que tenemos esta relación, la utilizamos en la construcción de los polinomios $p_n^w(\mathbf{x})$, lo que nos llevará a una relación entre $p_n^w(\mathbf{x})$ y $p_n^{\text{inf}}(\mathbf{x})$, que es lo que buscamos.

Explicación de la técnica

Así,

$$\begin{aligned} p_n^w(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F^w(\mathbf{x}, w) \frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x}), w) \frac{f(\mathbf{x}, w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x}), w) \frac{(1 + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x}), w) \frac{(1 + c_1(\mathbf{x})w + \dots + c_n(\mathbf{x})w^n)}{w^{n+1}} dw \\ &= \sum_{k=0}^n c_k(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C F^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x}), w) \frac{dw}{w^{n+1-k}} \right] \quad \text{c.v.} \end{aligned}$$

$$p_n^w(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=0}^n c_k(\mathbf{x}) \left\{ p_{n-k}^{\text{inf}}(\text{param}(\mathbf{x})) \right\}$$

Propiedades asintóticas

Llegados a este punto, debemos hacer dos consideraciones:

- ¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

$$F^{\text{w}}(\boldsymbol{x}, w) = F^{\text{inf}}(\text{param}(\boldsymbol{x}), w) f(\boldsymbol{x}, w)$$

★ Veremos que depende de $F^{\text{inf}}(\boldsymbol{x}, w)$

- ¿Cuáles son las propiedades asintóticas de los coeficientes c_k ?

$$p_n^{\text{w}}(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=0}^n c_k(\boldsymbol{x}) \left\{ p_{n-k}^{\text{inf}}(\text{param}(\boldsymbol{x})) \right\}$$

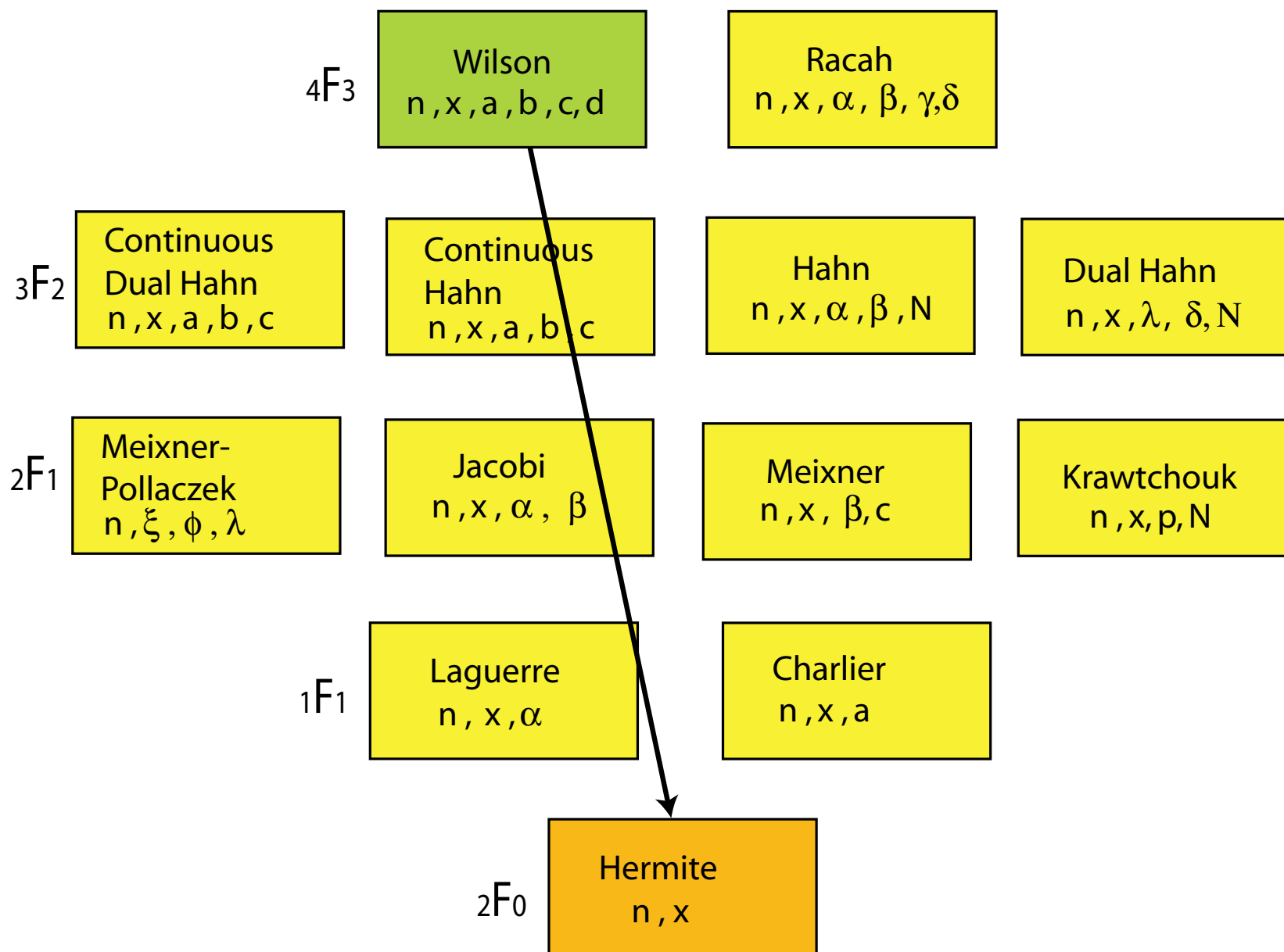
★ Estableceremos éstas en un lema

Como ejemplo vamos a obtener las relaciones entre los polinomios de Wilson y algunos de los niveles inferiores.

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?



¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

Desarrollo en términos de polinomios de **Hermite**

$$F^{\text{inf}}(\mathbf{x}, w) = e^{2\mathbf{x}w - w^2}$$

$$F^{\text{W}}(\mathbf{x}, w) = e^{2BXw - B^2w^2} f(\mathbf{x}, w)$$

donde X y B son parámetros a determinar, ¿cómo?

$$F^{\text{W}}(\mathbf{x}, w) = e^{2BXw - B^2w^2} \left(1 + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots \right)$$

$$1 + p_1^{\text{W}}(\mathbf{x})w + p_2^{\text{W}}(\mathbf{x})w^2 + \dots = e^{2BXw - B^2w^2} \left(1 + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots \right)$$

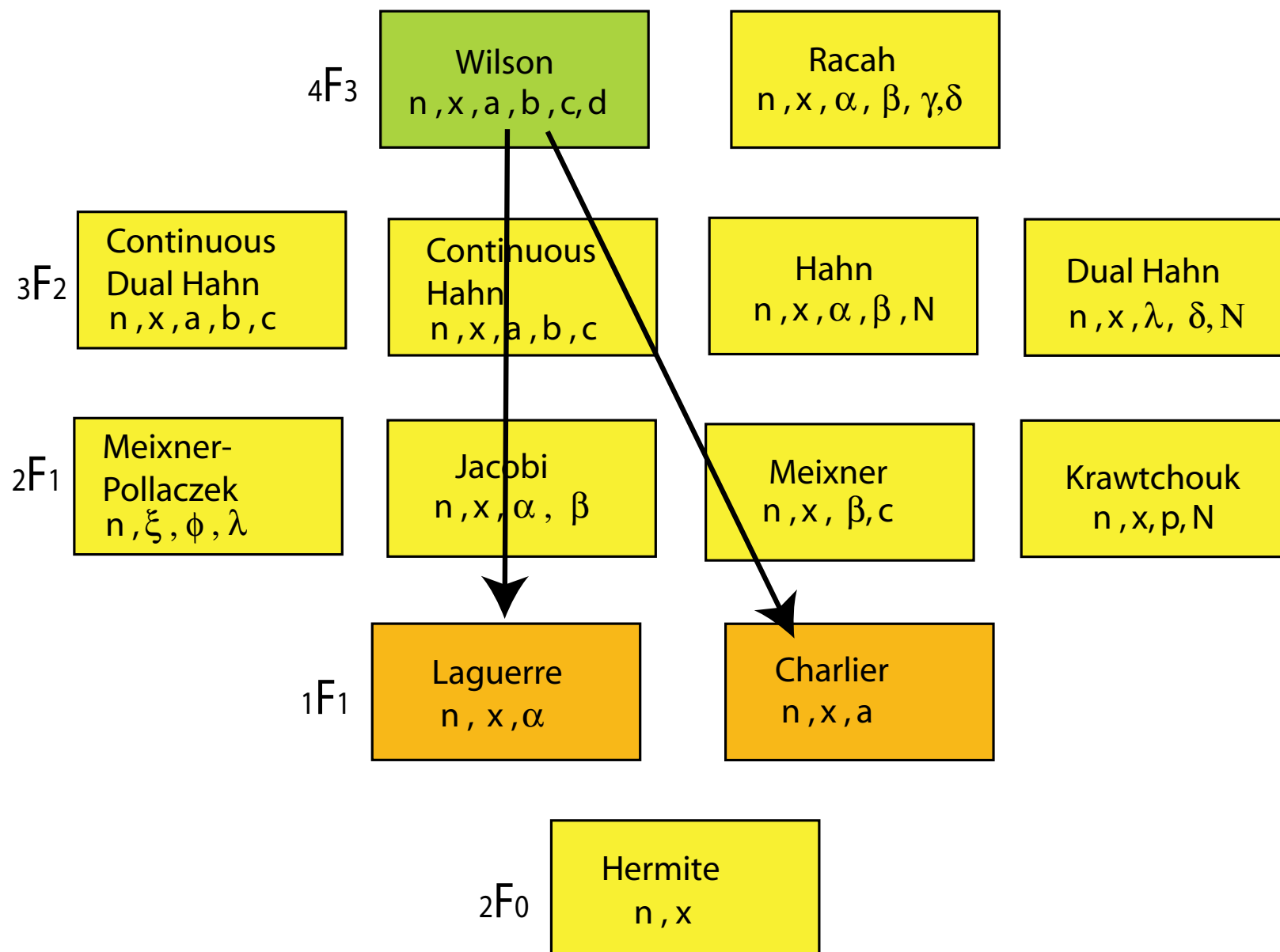
★ elección de X y $B \Rightarrow$ requerimos $c_1 = c_2 = 0$

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(p_1^{\text{W}}(\mathbf{x}))^2 - p_2^{\text{W}}(\mathbf{x})}, \quad X = \frac{p_1^{\text{W}}(\mathbf{x})}{2B}$$

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?



¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

Desarrollo en términos de polinomios de **Laguerre**

$$F^{\text{inf}}(\textcolor{red}{x}, w) = (1 - w)^{-\alpha-1} e^{\frac{\textcolor{red}{x}w}{w-1}}$$

$$F^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}, w) = (1 - w)^{-\textcolor{blue}{X}-1} e^{\frac{\textcolor{blue}{A}w}{w-1}} f(\textcolor{red}{x}, w)$$

donde $\textcolor{blue}{A}$ y $\textcolor{blue}{X}$ son parámetros a determinar, ¿cómo?

$$F^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}, w) = (1 - w)^{-\textcolor{blue}{X}-1} e^{\frac{\textcolor{blue}{A}w}{w-1}} \left(1 + c_1(\textcolor{red}{x})w + c_2(\textcolor{red}{x})w^2 + \dots \right)$$

$$1 + p_1^{\text{w}}(\textcolor{red}{x})w + \dots = (1 - w)^{-\textcolor{blue}{X}-1} e^{\frac{\textcolor{blue}{A}w}{w-1}} (1 + c_1(\textcolor{red}{x})w + \dots)$$

★ elección de $\textcolor{blue}{A}$ y $\textcolor{blue}{X} \Rightarrow$ requerimos $c_1 = c_2 = 0$

$$\textcolor{blue}{A} = p_1^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}) + (p_1^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}))^2 - 2p_2^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}), \quad \textcolor{blue}{X} = \textcolor{blue}{A} + p_1^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}) - 1$$

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

Desarrollo en términos de polinomios de **Charlier**

$$F^{\text{inf}}(\mathbf{x}, w) = e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x$$

$$F^{\text{w}}(\mathbf{x}, w) = e^{Aw}(1-w)^X f(\mathbf{x}, w)$$

donde A y X son parámetros a determinar, ¿cómo?

$$F^{\text{w}}(\mathbf{x}, w) = e^{Aw}(1-w)^X \left(1 + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots\right)$$

$$1 + p_1^{\text{w}}(\mathbf{x})w + p_2^{\text{w}}(\mathbf{x})w^2 + \dots = e^{Aw}(1-w)^X \left(1 + c_1(\mathbf{x})w + c_2(\mathbf{x})w^2 + \dots\right)$$

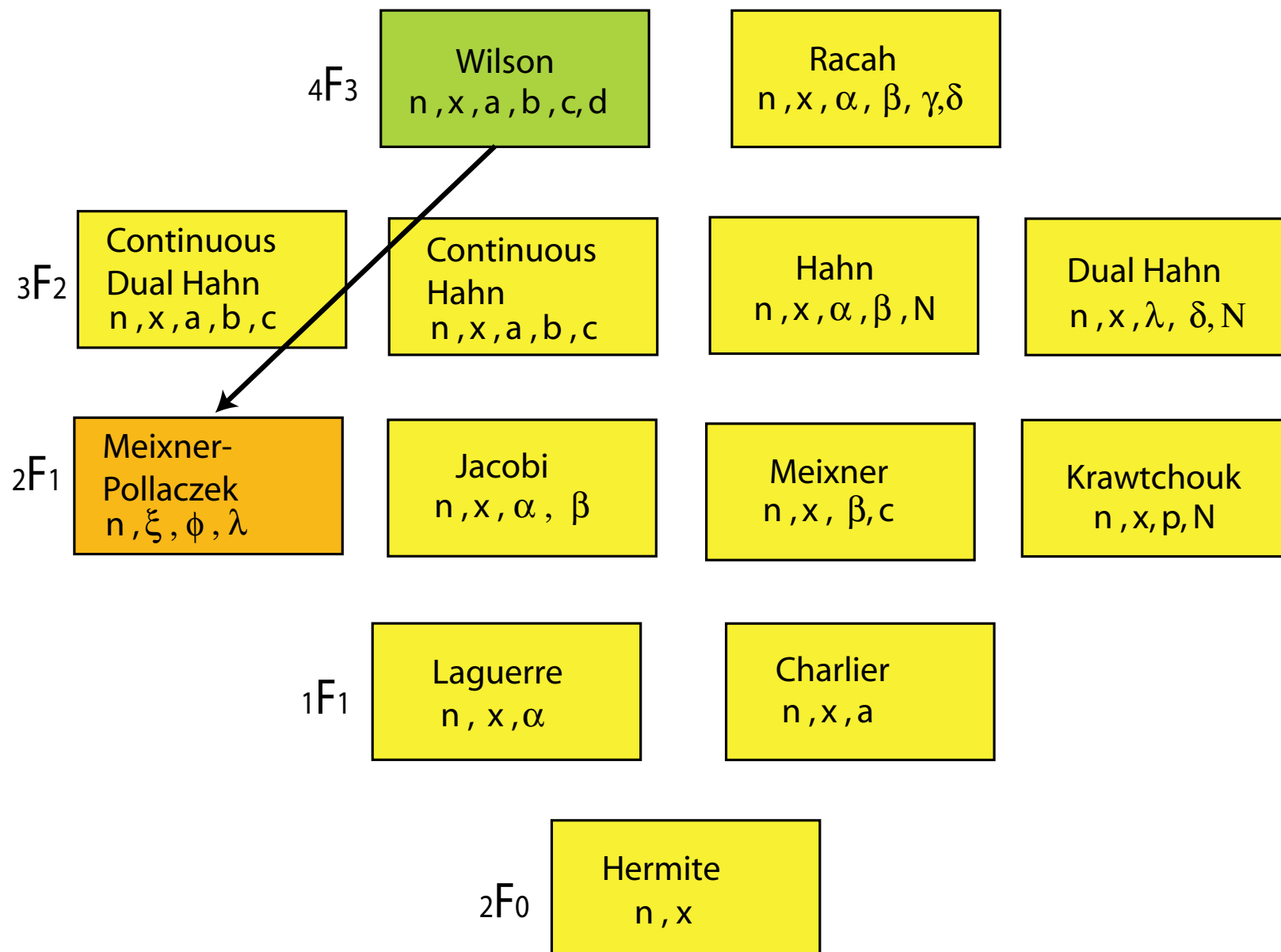
★ elección de A y $X \Rightarrow$ requerimos $c_1 = c_2 = 0$

$$A = p_1^{\text{w}}(\mathbf{x}) + (p_1^{\text{w}}(\mathbf{x}))^2 - 2p_2^{\text{w}}(\mathbf{x}), \quad X = A + p_1^{\text{w}}(\mathbf{x})$$

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?



¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

Desarrollo en términos de polinomios de
Meixner–Pollaczek

$$F^{\text{inf}}(\mathbf{x}, w) = (1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+i\mathbf{x}}(1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-i\mathbf{x}}$$

$$F^{\text{w}}(\mathbf{x}, w) = (1 - e^{iA}w)^{-C+iX}(1 - e^{-iA}w)^{-C-iX}f(\mathbf{x}, w)$$

donde A , C y X son parámetros a determinar, ¿cómo?

$$F^{\text{w}}(\mathbf{x}, w) = (1 - e^{iA}w)^{-C+iX}(1 - e^{-iA}w)^{-C-iX}(1 + c_1(\mathbf{x})w + \dots) \\ 1 + p_1^{\text{w}}(\mathbf{x})w + \dots = (1 - e^{iA}w)^{-C+iX}(1 - e^{-iA}w)^{-C-iX}(1 + c_1(\mathbf{x})w + \dots)$$

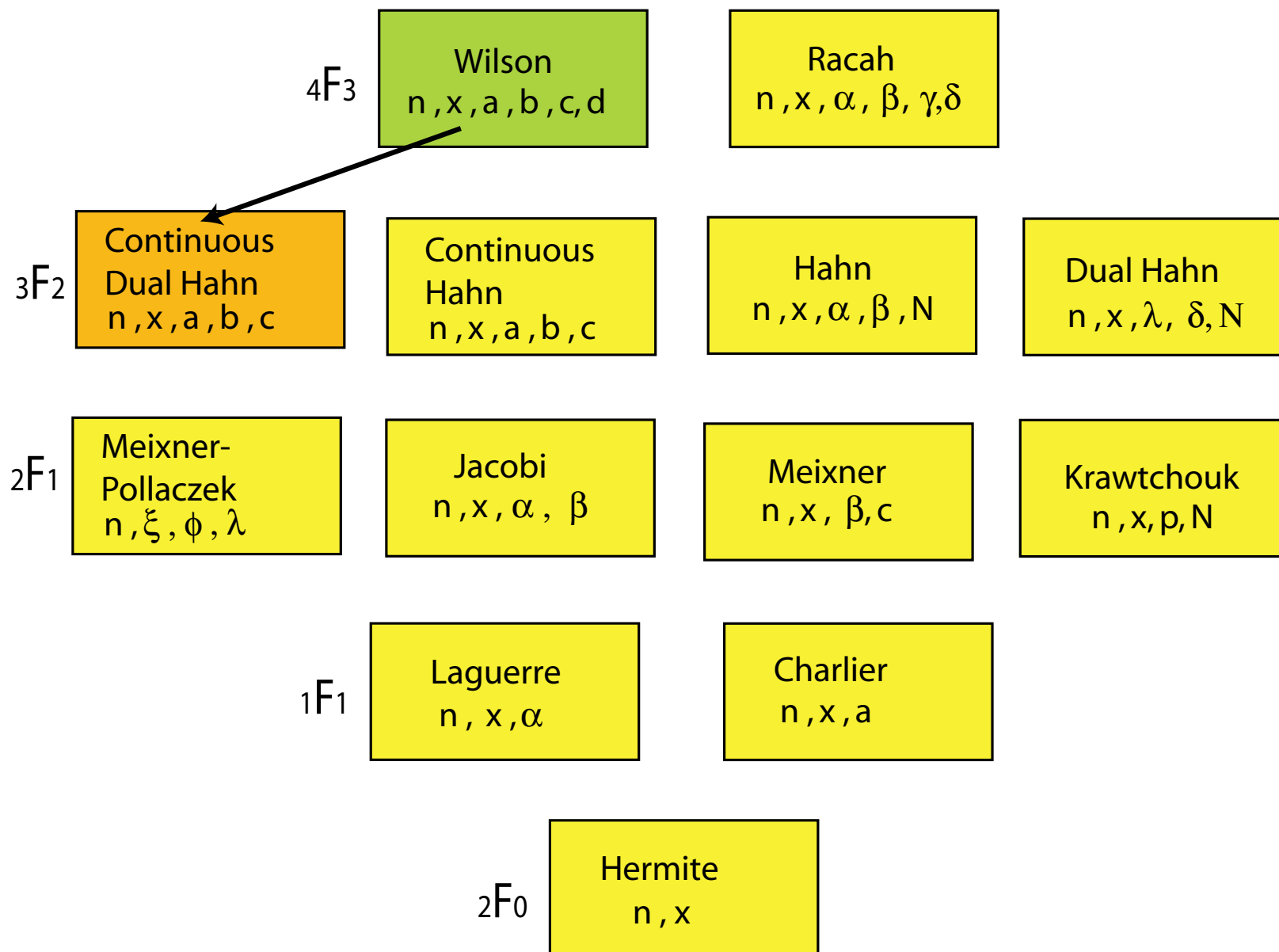
★ elección de A , C y $X \Rightarrow$ requerimos $c_1 = c_2 = 0$ y $A \neq k\pi$ constante

$$C = \frac{1}{2} \left[2p_1^{\text{w}}(\mathbf{x}) \cos A + (p_1^{\text{w}}(\mathbf{x}))^2 - 2p_2^{\text{w}}(\mathbf{x}) \right], \quad X = \dots$$

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?



¿Cómo realizamos este “matching” entre las funciones generadoras?

Desarrollo en términos de polinomios de **Continuous Dual Hahn**

$$F^{\text{low}}(\textcolor{red}{x}, w) = (1 - w)^{-c - i\textcolor{red}{x}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a + i\textcolor{red}{x} & b + i\textcolor{red}{x} \\ a + b \end{matrix} \middle| w \right)$$

$$F^{\text{w}}(\textcolor{red}{x}, w) = (1 - w)^{-\textcolor{blue}{C} - i\textcolor{blue}{X}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \textcolor{blue}{A} + i\textcolor{blue}{X} & \textcolor{blue}{B} + i\textcolor{blue}{X} \\ \textcolor{blue}{A} + \textcolor{blue}{B} \end{matrix} \middle| w \right) f(\textcolor{red}{x}, w)$$

donde $\textcolor{blue}{A}$, $\textcolor{blue}{B}$, $\textcolor{blue}{C}$ y $\textcolor{blue}{X}$ son parámetros a determinar, ¿cómo?

$$1 + p_1^{\text{w}}(\textcolor{red}{x})w + \dots = (1 - w)^{-\textcolor{blue}{C} - i\textcolor{blue}{X}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \textcolor{blue}{A} + i\textcolor{blue}{X} & \textcolor{blue}{B} + i\textcolor{blue}{X} \\ \textcolor{blue}{A} + \textcolor{blue}{B} \end{matrix} \middle| w \right) (1 + c_1(\textcolor{red}{x})w \dots)$$

★ elección de $\textcolor{red}{A}$, $\textcolor{red}{B}$, $\textcolor{red}{C}$ y $\textcolor{blue}{X} \Rightarrow$ requerimos $c_1 = c_2 = 0$ y $\textcolor{blue}{C}$, $\textcolor{blue}{X}$ constantes

$$\textcolor{blue}{A} = \dots, \quad \textcolor{blue}{B} = \dots$$

¿Cuáles son las propiedades asintóticas de los coeficientes c_k ?

Estas propiedades las resolvemos con el siguiente **Lema**:

Si

$$\phi(w) = \mu^s \omega^m (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots),$$

con $a_0 \neq 0$, $a_k = \mathcal{O}(1)$ y $\mu \rightarrow \infty$ el parámetro asintótico.

Entonces, los coeficientes de la serie

$$f(w) = e^{\phi(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \left(\begin{array}{l} \text{por ejemplo} \\ \text{hermite} \end{array} \begin{array}{l} F^w(x, w) = e^{Aw - Bw^2} f(x, w) \\ f(x, w) = e^{-Aw + Bw^2 + \log F^w(x, w)} \end{array} \right)$$

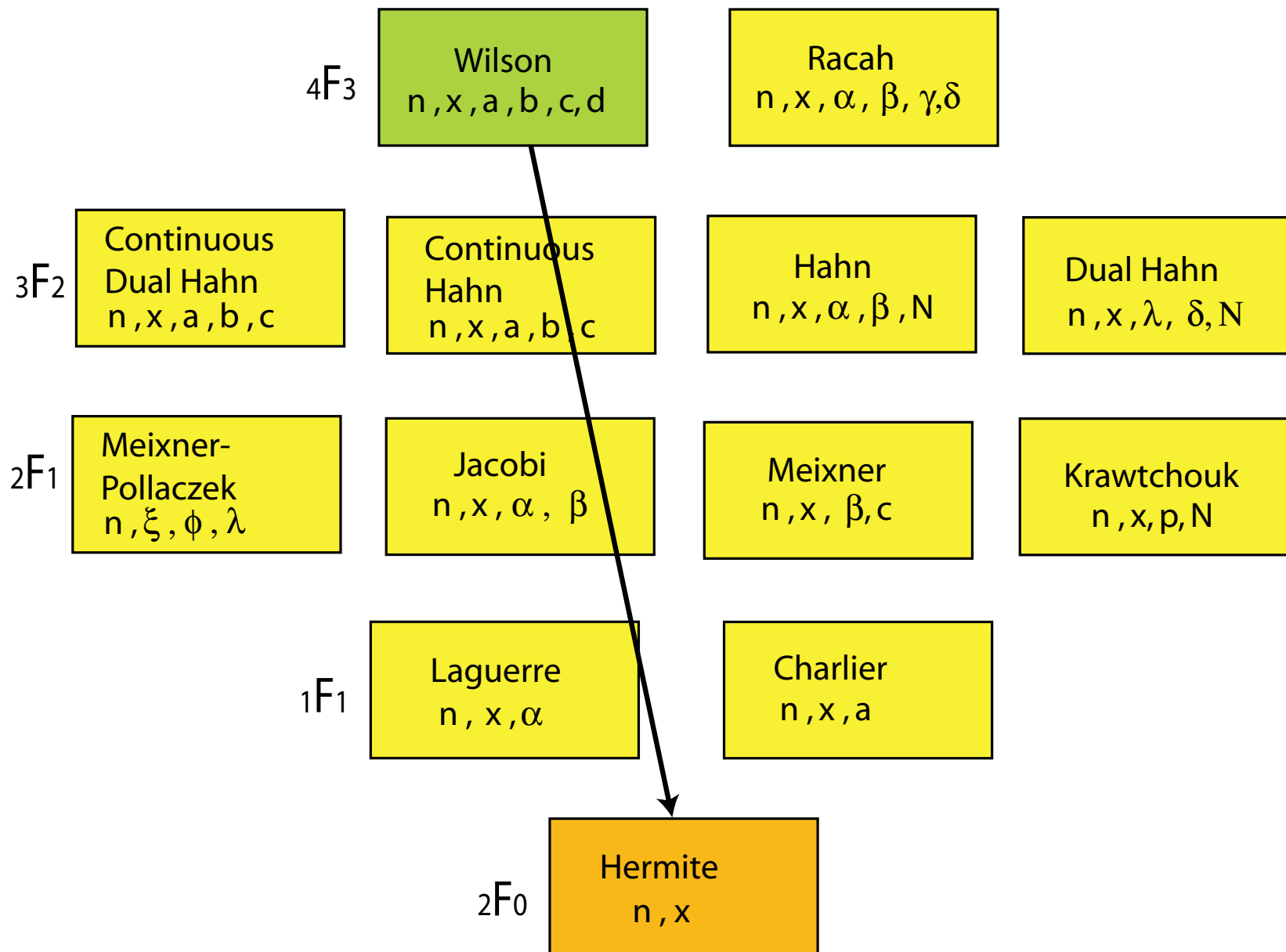
tienen el siguiente orden:

$$c_0 = 1, c_k = 0, k = 1, 2, \dots, m-1, \quad c_k = \begin{cases} \mathcal{O}(\mu^{[sk/m]}), & s > 0 \\ \mathcal{O}(\mu^s), & s \leq 0 \end{cases}$$

Comprobación numérica: tablas de resultados

	$4F_3$	Wilson n, x, a, b, c, d	Racah $n, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	
$3F_2$	Continuous Dual Hahn n, x, a, b, c	Continuous Hahn n, x, a, b, c	Hahn n, x, α, β, N	Dual Hahn n, x, λ, δ, N
$2F_1$	Meixner- Pollaczek n, ξ, ϕ, λ	Jacobi n, x, α, β	Meixner n, x, β, c	Krawtchouk n, x, p, N
	$1F_1$	Laguerre n, x, α	Charlier n, x, a	
	$2F_0$	Hermite n, x		

Wilson $\rightarrow$ Hermite



Wilson $\rightarrow$ Hermite

- Wilson $\rightarrow$ **Hermite** para valores grandes de a, b, c y d

$$\frac{W_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_nn!} = \sum_{k=0}^n \frac{c_k(x)}{B^{k-n}(n-k)!} H_{n-k}(X)$$

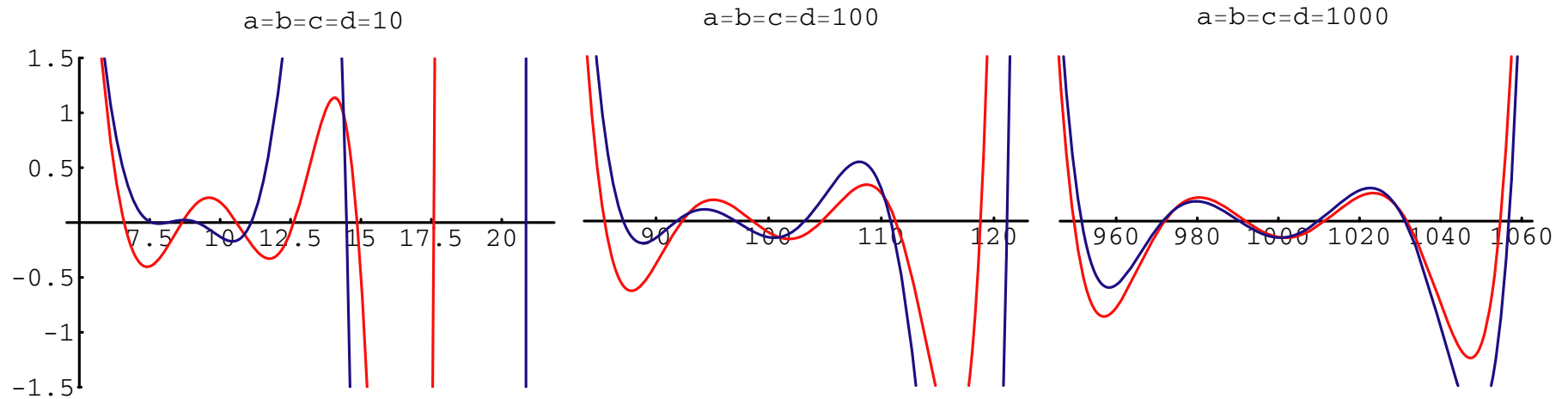
$$\frac{c_k(x)}{B^{k-n}(n-k)!} H_{n-k}(X) = \mathcal{O} \left(a^{n+\left[\frac{k}{3}\right]-k} \right) \quad a \sim b \sim c \sim d$$

¡límite nuevo!

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{W_n(\xi^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_n B(\xi)^n} = H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

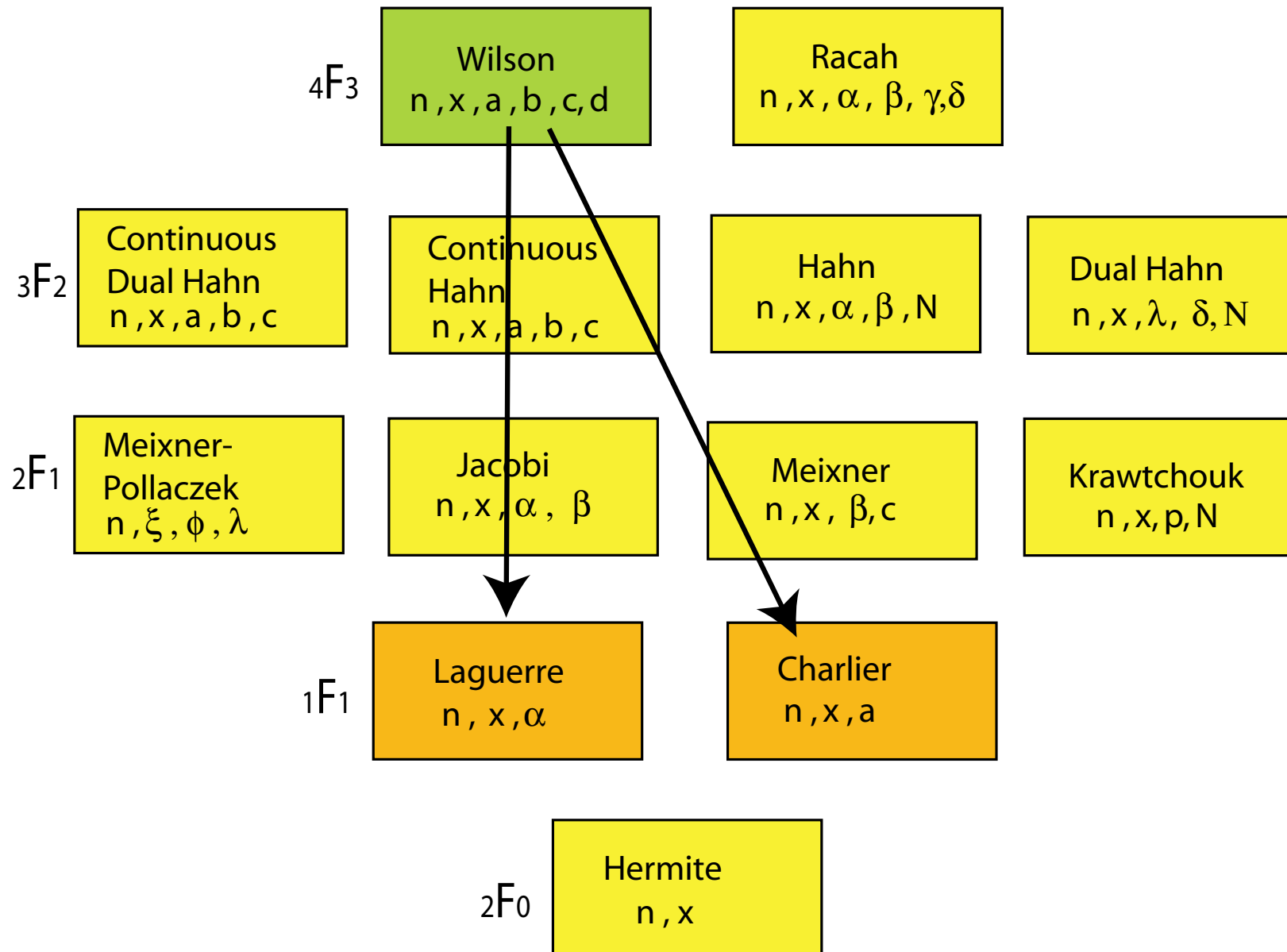
$$\xi = g(x; a, b, c, d)$$

Wilson $\rightarrow$ Hermite



$a = b = c = d$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10	0.15	0.058	0.13	0.12	0.025	0.19
100	0.02	0.01	0.02	0.015	0.004	0.02
1000	0.002	0.0005	0.002	0.0015	0.0004	0.002

Wilson $\rightarrow$ Laguerre and Charlier



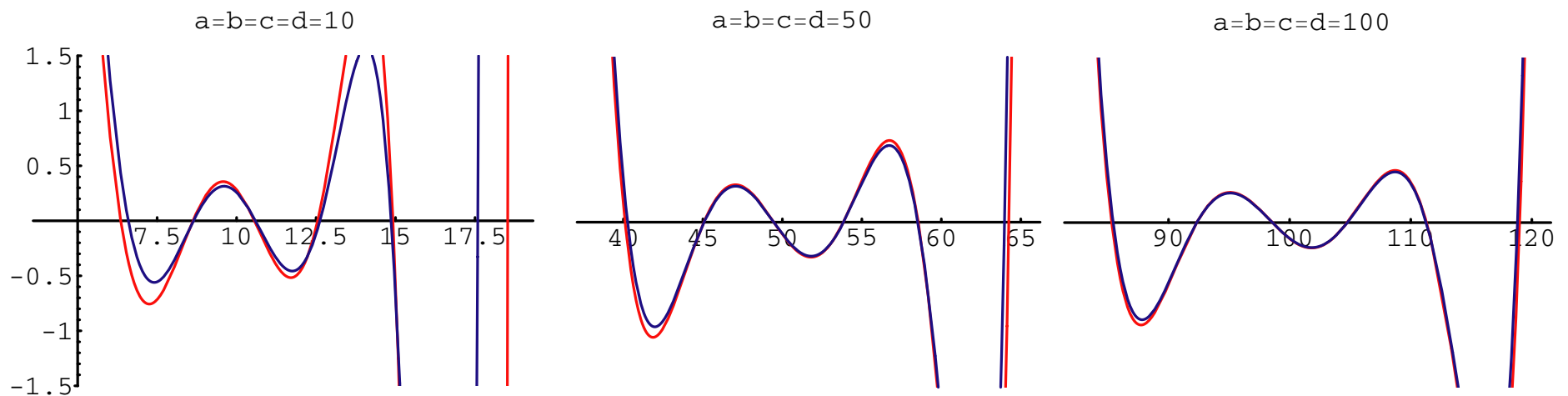
Wilson $\rightarrow$ Laguerre

- Wilson $\rightarrow$ **Laguerre** para valores grandes de a , b , c y d

$$\frac{W_n(\textcolor{red}{x}^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_nn!} = \sum_{k=0}^n c_k(\textcolor{red}{x}) L_{n-k}^{\textcolor{blue}{X}}(\textcolor{blue}{A})$$

$$c_k(\textcolor{red}{x}) L_{n-k}^{\textcolor{blue}{X}}(\textcolor{blue}{A}) = \mathcal{O}\left(a^{n+\lceil \frac{k}{3} \rceil - k}\right) \quad a \sim b \sim c \sim d$$

Wilson $\rightarrow$ Laguerre



$a = b = c = d$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10	0.04	0.002	0.003	0.006	0.004	0.05
50	0.004	0.0002	5.e-5	0.0004	0.0003	0.004
100	0.001	9.e-5	8.e-6	0.0001	0.0001	0.001

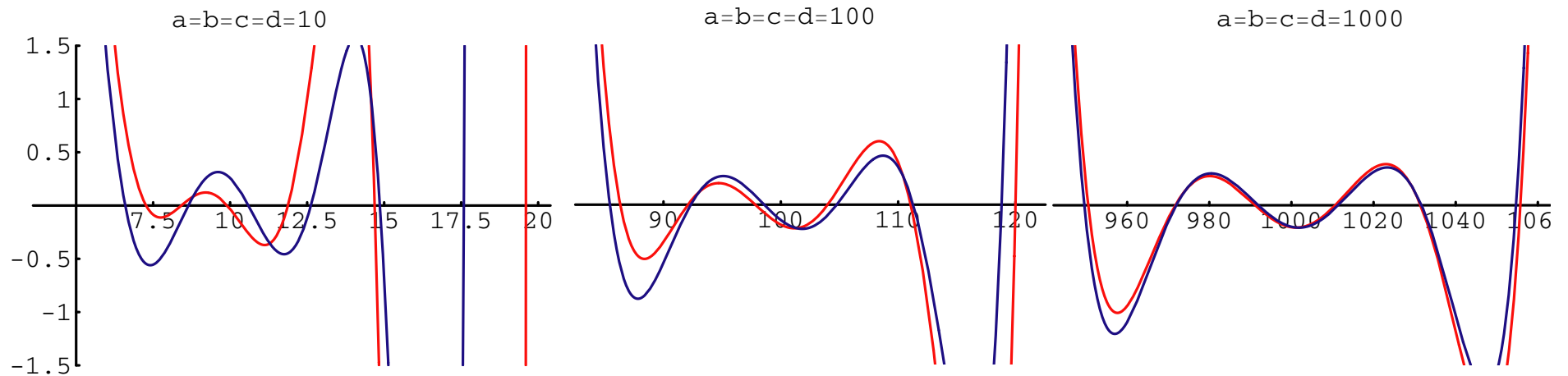
Wilson $\rightarrow$ Charlier

- Wilson $\rightarrow$ **Charlier** para valores grandes de a, b, c y d

$$\frac{W_n(\textcolor{red}{x}^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_nn!} = \sum_{k=0}^n \frac{c_k(\textcolor{red}{x})\textcolor{blue}{A}^{n-k}}{(n-k)!} C_{n-k}(\textcolor{blue}{X}, \textcolor{blue}{A})$$

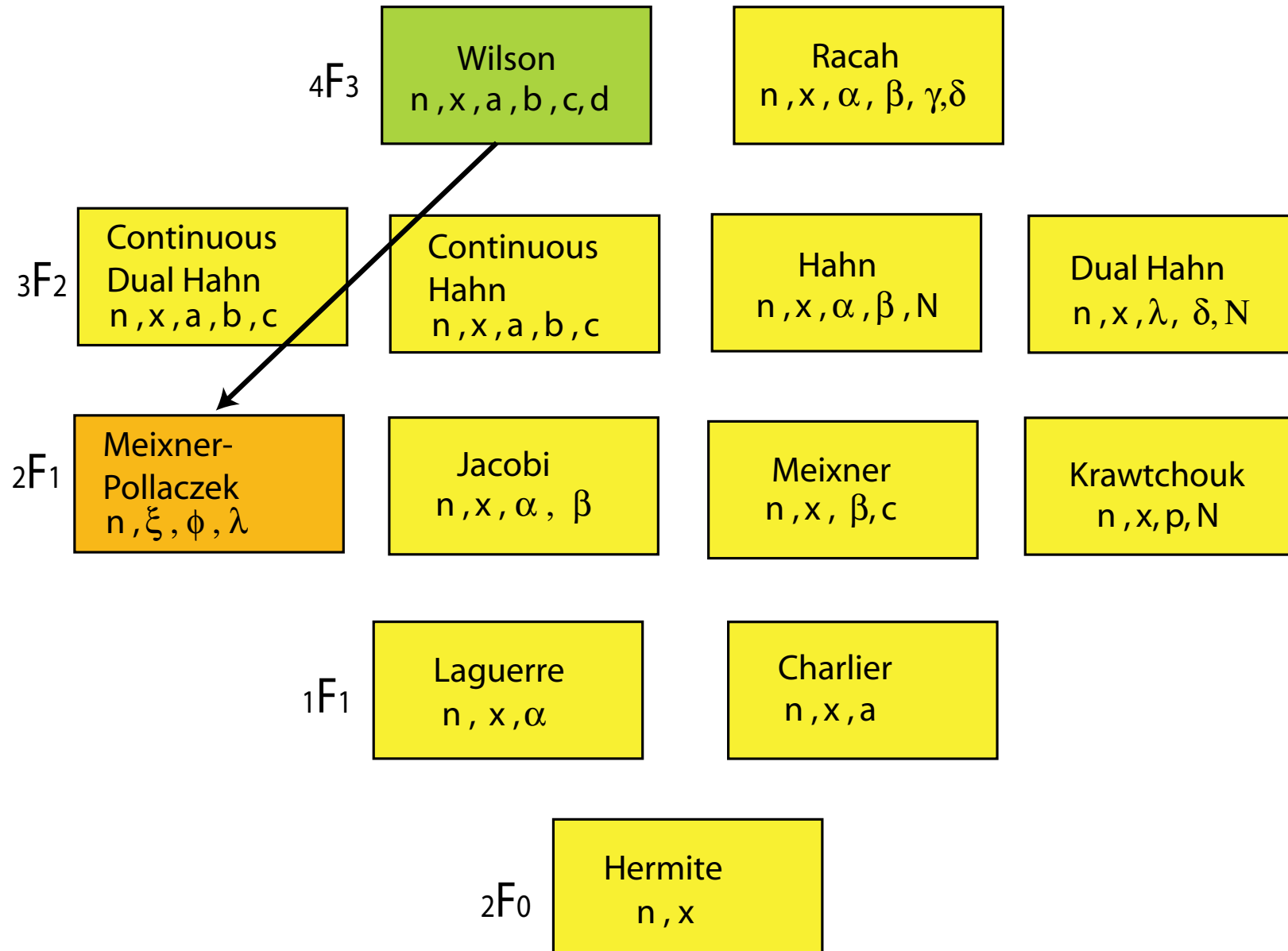
$$\frac{c_k(\textcolor{red}{x})\textcolor{blue}{A}^{n-k}}{(n-k)!} C_{n-k}(\textcolor{blue}{X}, \textcolor{blue}{A}) = \mathcal{O} \left(a^{n+\left[\frac{k}{3}\right]-k} \right) \quad a \sim b \sim c \sim d$$

Wilson $\rightarrow$ Charlier



$a = b = c = d$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10	0.09	0.03	0.07	0.06	0.01	0.1
100	0.01	0.003	0.008	0.007	0.002	0.01
1000	0.001	0.0002	0.0008	0.0008	0.0002	0.001

Wilson $\rightarrow$ Meixner-Pollaczek



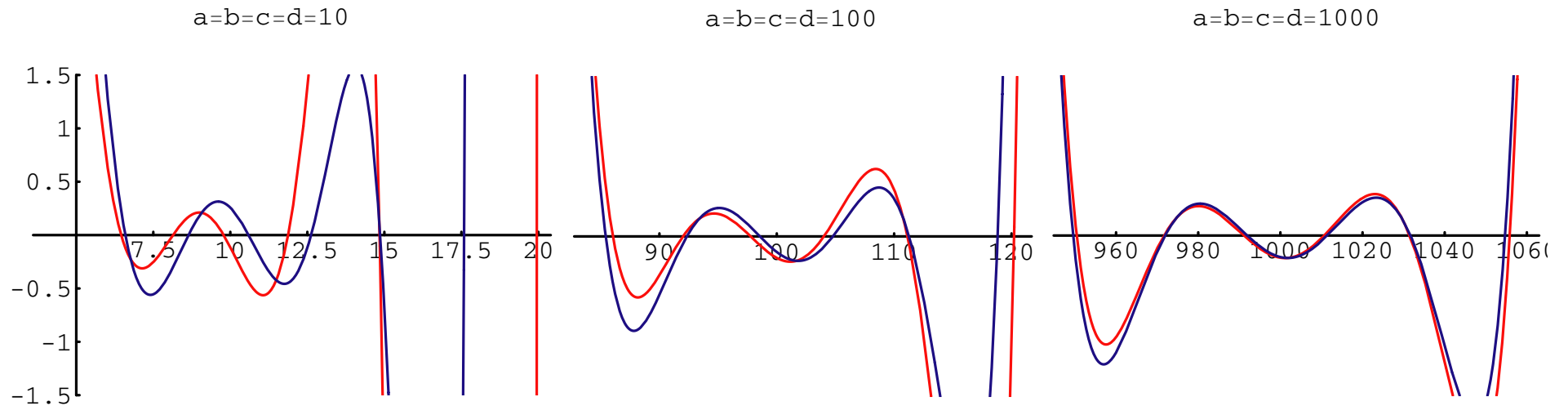
Wilson $\rightarrow$ Meixner-Pollaczek

- Wilson $\rightarrow$ **Meixner-Pollaczek** para valores grandes de a, b, c y d

$$\frac{W_n(\textcolor{red}{x}^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_n n!} = \sum_{k=0}^n c_k(\textcolor{red}{x}) P_{n-k}^{\textcolor{blue}{C}}(\textcolor{blue}{X}; \textcolor{blue}{A}), \quad \textcolor{blue}{A} \neq k\pi \text{ const}$$

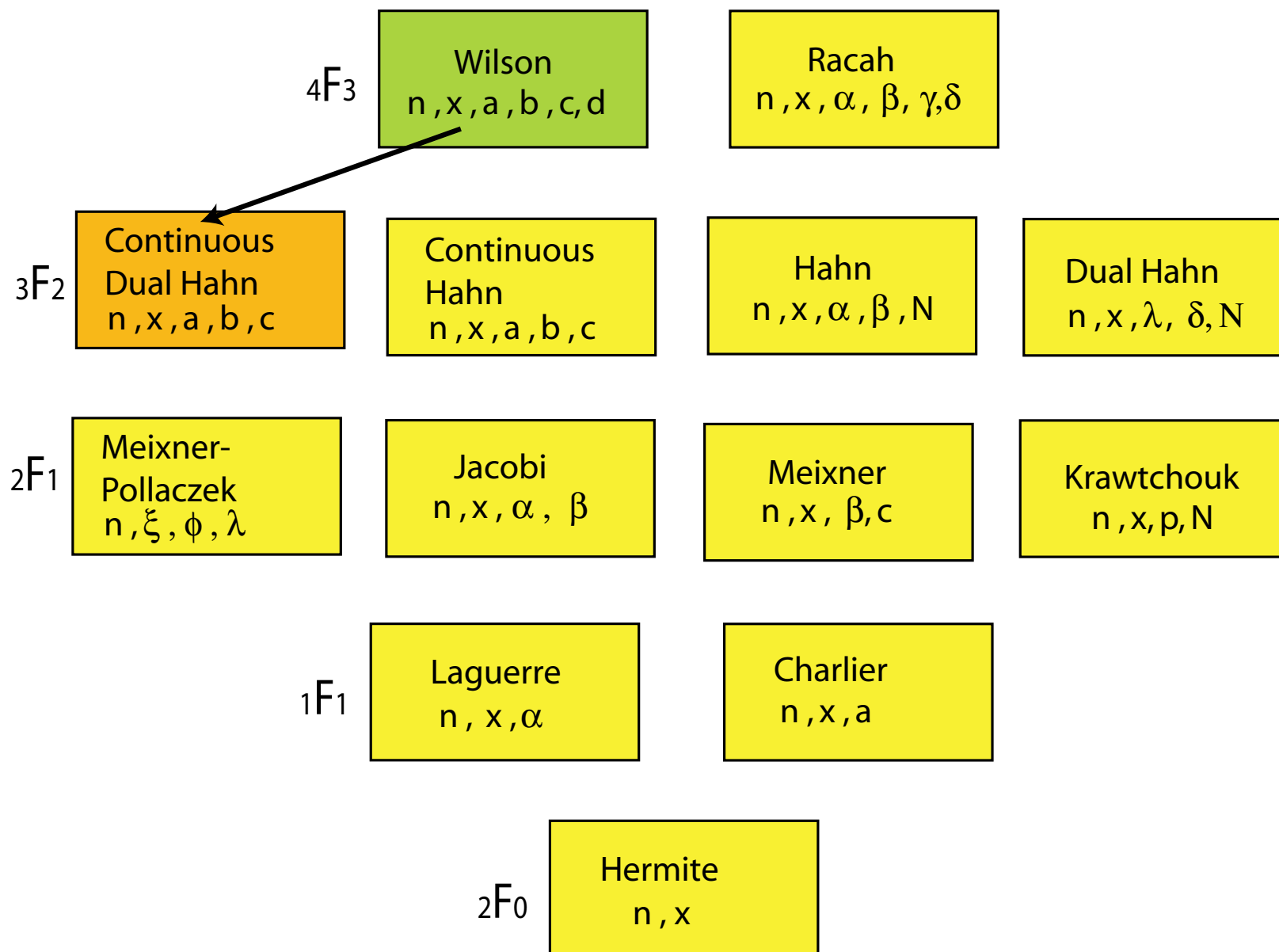
$$c_k(\textcolor{red}{x}) P_{n-k}^{\textcolor{blue}{C}}(\textcolor{blue}{X}; \textcolor{blue}{A}) = \mathcal{O} \left(a^{n + \left[\frac{k}{3} \right] - k} \right) \quad a \sim b \sim c \sim d$$

Wilson $\rightarrow$ Meixner-Pollaczek



$a = b = c = d$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10	0.02	0.06	0.08	0.06	0.001	0.1
100	0.007	0.004	0.008	0.007	0.001	0.01
1000	0.0009	0.0003	0.0008	0.0007	0.0002	0.001

Wilson $\rightarrow$ Continuous Dual Hahn



Wilson $\rightarrow$ Continuous Dual Hahn

- Wilson $\rightarrow$ **Continuous Dual Hahn** para valores grandes de a , b , c y d

$$\frac{W_n(\mathbf{x}^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(c+d)_nn!} = \sum_{k=0}^n c_k(\mathbf{x}) \frac{S_n(\mathbf{X}^2; A, B, C)}{(A+B)^{n-k}(n-k)!}, \quad C, \mathbf{X} \text{ const}$$

$$c_k(\mathbf{x}) \frac{S_n(\mathbf{X}^2; A, B, C)}{(A+B)^{n-k}(n-k)!} = \mathcal{O}\left(a^{n+\left[\frac{k}{3}\right]-k}\right) \quad a \sim b \sim c \sim d$$

