

1. Métodos distribucionales

Las técnicas distribucionales son debidas a McClure y Wong, que desarrollan su teoría en 1978, y tienen su aplicación en diversos tipos de integrales. Para ver la idea, consideramos el ejemplo de la transformada de Stieljes [11]:

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z} dt, \quad z \rightarrow \infty,$$

donde, para la función $f(t)$ requerimos:

- i) localmente integrable en $[0, \infty)$
- ii) que tenga un desarrollo en infinito:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{t^{n+\alpha}} + f_N(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

Si sustituimos este desarrollo en la integral, cambiando suma por integral obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z} dt = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_0^\infty \frac{dt}{t^{n+\alpha}(t+z)} + \int_0^\infty \frac{f_N(t)dt}{(t+z)}.$$

Esta forma de proceder, mirando la expresión anterior, no tiene mucho sentido puesto que las integrales $\int_0^\infty \frac{dt}{t^{n+\alpha}(t+z)}$ no están definidas. Sin embargo, si procedemos integrando por partes esta integral y olvidándonos de los términos de contorno, obtenemos las integrales finitas:

$$\frac{(-1)^n n!}{(\alpha)_n} \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha (t+z)^{n+1}}.$$

La teoría de distribuciones nos permite formalizar de forma rigurosa la idea anterior.

El punto de partida es ii), que expresa una identidad entre las funciones $f(t)$, $t^{-n-\alpha}$, y $f_N(t)$. Consideramos el espacio de funciones de decrecimiento rápido $\mathcal{S}$ y el conjunto de distribuciones temperadas actuando sobre las funciones φ de este espacio. Cada una de las funciones anteriores de la identidad ii) tiene su distribución asociada (en negrita):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle &\equiv \int_0^\infty f(t) \varphi(t) dt \quad \varphi \in \mathcal{S}, \\ \langle \mathbf{t}^{-\mathbf{k}-\alpha}, \varphi \rangle &\equiv \frac{1}{(\alpha)_k} \int_0^\infty t^{-\alpha} \varphi^{(k)}(t) dt \quad \varphi \in \mathcal{S}, \\ \langle \mathbf{f}_n, \varphi \rangle &\equiv (-1)^n \int_0^\infty f_{n,n}(t) \varphi^{(n)}(t) dt \quad \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

donde, hemos definido recursivamente $f_{n,n}(t)$:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= f(t) \\ f_{n,k+1}(t) &= - \int_t^\infty f_{n,k}(u) du = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_t^\infty (u-t)^k f_n(u) du, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Una vez que tenemos las distribuciones asociadas a todas las funciones, el objetivo es encontrar una relación entre ellas (similar a ii)). McClure y Wong obtienen esta relación:

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathbf{t}^{-\mathbf{k}-\alpha} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} M[f; k+1] \delta^{(\mathbf{k})} + \mathbf{f}_N,$$

donde $M[f; z]$ es la transformada de Mellin de $f(t)$, $M[f; z] = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt$ o su extensión analítica.

El siguiente paso es buscar una función $\varphi(t)$ adecuada que nos permita recuperar nuestra integral de partida en el primer miembro. Puesto que nuestro objetivo es la transformada de Stieljes, nuestra función sería $1/(t+z)$, pero ha de ser una función del espacio $\mathcal{S}$ por lo que lo resolvemos con una exponencial decreciente y un parámetro auxiliar $\eta > 0$, $\varphi(t) = e^{-\eta t}/(t+z)$. Ahora la función $\varphi(t) \in \mathcal{S}$, y aplicándola a ambos miembros de la relación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta t} f(t)}{t+z} dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{(\alpha)_k} \int_0^\infty \frac{(-1)^k e^{-\eta t} dt}{t^\alpha (t+z)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k M[f; k+1]}{k!} \langle \delta^{(\mathbf{k})}, \frac{e^{-\eta t}}{(t+z)} \rangle \\ &+ N! \int_0^\infty \frac{e^{-\eta t} f_{N,N}(t)}{(t+z)^{N+1}} dt + \mathcal{O}(\eta), \quad \eta \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de convergencia dominada y tomando el límite $\eta \rightarrow 0$ obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k (-1)^k}{z^{k+\alpha}} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M[f; k+1]}{z^{k+1}} + R_N(z), \quad (1)$$

con el resto dado por

$$R_N(z) \equiv N! \int_0^\infty \frac{f_{N,N}(t)}{(t+z)^{N+1}} dt.$$

En (1) tenemos una aproximación asintótica formal, con dos sucesiones asintóticas $\{z^{-k-\alpha}\}$ y $\{z^{-k-1}\}$. La cuestión ahora es demostrar que dicha aproximación es rigurosamente una aproximación asintótica. Para ello, hay que ver que el resto es del orden correspondiente. En [11] se demuestra que $R_N(z) = \mathcal{O}(z^{-N-\alpha})$ cuando $z \rightarrow \infty$. De hecho, se puede ver que si el resto del desarrollo ii) de la función $f(t)$ verifica una cota $|f(t)| \leq c_N t^{-N-\alpha}$, c_N constante, entonces

$$|R_N(z)| \leq \frac{\pi c_N}{\sin(\pi\alpha)} \frac{1}{|z|^{N+\alpha}}.$$

Observemos que hemos considerado la hipótesis ii) para el caso $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha = 1$ la forma de proceder es similar aunque algo más compleja al definir los términos análogos a la transformada de Mellin en (1). En este caso, la aproximación añade también términos logarítmicos en z .

Ejemplos de aplicación de los métodos distribucionales los tenemos en las transformadas de Laplace o Fourier cuando el parámetro de transformación es pequeño: $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$, $z \rightarrow 0$ ó $\int_0^\infty e^{ixt} f(t) dt$, $x \rightarrow 0$ [13].

Referencias

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, *Dover Pub.*, New York, 1972.
- [2] R. A. Askey, Orthogonal polynomials and special functions, *S.I.A.M.*, Philadelphia, 1975.
- [3] C. Ferreira and J.L. López, Asymptotic Expansions of the Generalized Epstein-Hubbell integral, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **67**, n. 3, (2002) 301-319.
- [4] C. Ferreira and J.L. López, Asymptotic expansions of the Lauricella's hypergeometric function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **151**, (2003) 235-256.
- [5] C. Ferreira and J.L. López, Analytic Expansions of Thermonuclear Reaction Rates, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, (2004) 1-23.
- [6] C. Ferreira and J.L. López, Asymptotic Expansions of the Appell's Function F_1 , *Quarterly of Applied Mathematics*, **62**, n.2 (2004) 235-257.
- [7] C. Ferreira and J.L. López, The Lambert transform for small and large values of the transformation parameter, *Quarterly of Applied Mathematics*, **64**, n.3 (2006) 515-527.
- [8] C. Ferreira and J.L. López, Symmetric standard elliptic integrals with two or three large parameters, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **17**, n.6 (2006) 433-442.
- [9] J. L. López, Asymptotic xpansions of symmetric standard elliptic integrals, *SIAM J. Math. Anal.* **31**, n. 4 (2000) 754-775.
- [10] J. L. López, Uniform asymptotic expansions of symmetric elliptic integrals, *Const. Approx.* **17**, n. 4 (2001) 535-559.
- [11] J. L. López and C. Ferreira, Asymptotic expansions of generalized Stieltjes transforms of algebraically decaying functions, *Stud. Appl. Math.*, **108**, (2002) 187-215.
- [12] J. L. López and C. Ferreira, Asymptotic Expansions of the Generalized Epstein-Hubbell integral, *IMA J. Appl. Math.*, **67**, (2002) 301-319.
- [13] R. Wong, Asymptotic approximations of integrals, *Academic Press*, New York, 1989.