1. Introducción ¿Qué es la aproximación asintótica?

El concepto de aproximación está presente en la mayoría de los problemas que aborda la Matemática Aplicada. El campo que abarca es amplio y variado, presentándose de distintas formas según el objeto matemático que se desee aproximar y el problema que se está trabajando. Además, debemos disponer de una medida de distancia que nos proporcione una medida de la bondad de la aproximación. En cuanto al objeto matemático podemos hablar de aproximación de:

puntos en $\mathbb{R}^n$ por puntos en $\mathbb{R}^n$ (o en un espacio de dimensión finita),

funciones por funciones.

Y según el problema, algunos de los ejemplos que se estudian en aproximación son:

- ◇ Resolución de ecuaciones y sistemas algebraicos tanto lineales como no lineales.
- ◇ En el problema de aproximación de funciones, buscamos funciones más elementales dentro de un cierto subconjunto, que aproximen a la función de acuerdo con una cierta medida.
- ◇ La teoría de interpolación polinómica estudia la aproximación de funciones en las cuales se conoce el valor en unos puntos.
- ◇ Las teorías de derivación e integración numérica buscan aproximaciones a las derivada e integral de la función.
- ◇ Las teorías de resolución numérica de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones diferenciales, o bien de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, proporcionan métodos de obtención de soluciones aproximadas de dichas ecuaciones o sistemas.
- ◇ Aproximación de un objeto geométrico.

Para cada problema de aproximación, existen métodos específicamente adaptados al mismo, pero todos tienen la misma finalidad: "*proporcionar un algoritmo que permita construir una representación más simple de la solución (que es la aproximación) de acuerdo con unos determinados criterios*".

Por otra parte, la mayoría de los problemas de la física e ingeniería están definidos mediante ecuaciones (diferenciales, integrales, en derivadas parciales, etc.) que dependen de unos parámetros: masa, coeficiente de viscosidad, constante de Planck, velocidad de la luz, carga eléctrica, etc. De modo que, tanto las soluciones como sus aproximaciones arrastrarán la dependencia de dichos parámetros. El problema surge cuando en numerosas situaciones reales, uno o varios de dichos parámetros, que denominaremos parámetros asintóticos, toman valores numéricamente muy alejados del resto: por ejemplo en un problema cinemático, la velocidad de la luz será muy superior al resto de velocidades; en ciertos problemas de potenciales centrales, la masa o carga central es muy superior al resto de masas o cargas; en un fluido poco viscoso, el coeficiente de viscosidad es muy pequeño en comparación con el resto de constantes de la dinámica de fluidos.

Por ello sería interesante disponer de soluciones aproximadas a dichos problemas que reflejasen bien al comportamiento de la solución en ciertos límites de los parámetros. Además estas soluciones aproximadas deberían tener una expresión funcional sencilla en términos del o de los parámetros asintóticos para poder trabajar posteriormente con ellas. Los métodos numéricos habituales no prestan en principio especial atención a estos requisitos y se hace necesario disponer de métodos que proporcionen aproximaciones sencillas en términos de las variables asintóticas y que sean válidas en los correspondientes límites asintóticos: éste es el objeto de la *aproximación asintótica*.

La mayoría de los problemas en física e ingeniería en los que aparecen parámetros asintóticos están formulados mediante ecuaciones diferenciales y en menor medida, ecuaciones integrales. En cualquier caso, la solución de muchos problemas diferenciales admite una representación integral. Por ello, la teoría de aproximación asintótica se divide en dos campos de trabajo: la aproximación asintótica de soluciones de ecuaciones diferenciales [5], [7], y la aproximación asintótica de integrales [3], [8]. Nuestra investigación se centra en el segundo de los campos citados.

El objetivo principal de la aproximación asintótica es "*obtener una aproximación a una función de expresión analítica complicada (una representación integral) en términos de funciones sencillas válida en un cierto límite y en un sentido asintótico*".

De forma rigurosa establecemos la siguiente definición: sean las funciones $F(z)$ y $\Phi_n(z)$, $n = 0, 1, 2, ...$ definidas en un conjunto no acotado del plano complejo Ω. La serie formal dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z)$ se denomina *aproximación asintótica* de $F(z)$ cuando $z \to \infty$ en Ω, y escribiremos

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \qquad z \to \infty, \tag{1}$$

si, para cada $N > 0$, se tiene

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(z) + R_N(z),$$

donde $\Phi_n(z)$ es una *sucesión asintótica*, es decir,

$$\Phi_{n+1}(z) = o(\Phi_n(z)), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

y el término del resto es del orden del primer término despreciado:

$$R_N(z) = \mathcal{O}(\Phi_N(z)), \quad z \to \infty \tag{2}$$

La definición anterior tiene dos aspectos interesantes:

- No se exige que la serie sea convergente. De hecho, en la mayoría de los ejemplos interesantes, la serie es divergente.
- La sucesión asintótica no es única. Sin embargo, fijada una sucesión $\{\phi_n(z)\}$, los coeficientes a_n sí son únicos.

Finalmente, añadir que además de la obtención de la aproximación asintótica, un segundo objetivo es, como en cualquier método de aproximación, obtener cotas para el término del error $R_N(z)$.

2. Aproximación asintótica de integrales

El objetivo es obtener aproximaciones asintóticas de integrales. Esta teoría nos va a permitir obtener información analítica y numérica sobre la solución de problemas especialmente complicados en matemática aplicada, ingeniería, física y otras ciencias que precisan de un modelo matemático para describir el problema científico. Esta teoría nos permite por ejemplo obtener la fórmula de Stirling para el factorial,

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n} + ...\right], \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

así como aproximar la función de Bessel en términos de funciones circulares,

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad z \to \infty, \tag{4}$$

y la aproximación para armónicos,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n, \qquad n \to \infty, \tag{5}$$

o en general, dar sentido a desarrollos formales del tipo

$$I(x) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad x > 0. \tag{6}$$

Esta serie es divergente y por tanto no puede ser igual a la integral de partida, que es finita. Pero por ejemplo, tenemos que $I(10) = 0.09156...$ y la suma de los 4 primeros términos de la

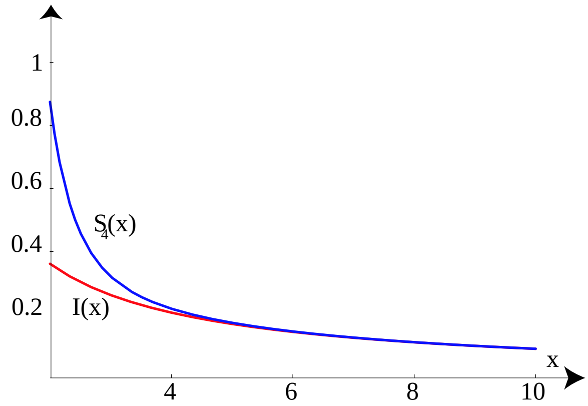

Figura 1: La función y su aproximación asintótica hasta el cuarto sumando

serie anterior para $x = 10$ es 0.09140..., luego aproxima al valor exacto de la integral con un error del orden del 0.1 %.

En general, el problema que se plantea es encontrar una aproximación del tipo (1) de una función compleja $f(z)$ definida mediante una integral

$$f(z) = \int_\Gamma h(w)g(w,z)dw,$$

donde

$$h(w) : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(w,z) : \Gamma \times \{\mathbb{C} \setminus B(0,r_0)\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

con $r_0 > 0$, verifican que $h(w)g(w,z)$ es integrable a lo largo del camino Γ para $|z| \geq r_0$ ([8], cap.1).

El ejemplo (6) responde a esta situación con $z \equiv x$, $f(z) \equiv I(x)$, $\Gamma = [0,\infty)$, $h(t) = e^{-t}$, $g(t,x) = (1+t/x)^{-1}$, $a_n = (-1)^n n!$ y $\phi_n(x) \equiv x^{-n-1}$.

Para comprender la utilidad del desarrollo formal efectuado en (6) y darle un sentido riguroso (asintótico), debemos todavía comprobar si se verifica (2). Con las siguientes cuentas,

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t} - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n t^n\right] e^{-xt}dt \\ &= (-1)^N \int_0^\infty \frac{t^N e^{-xt}}{1+t}dt \quad \Rightarrow \quad |R_N(x)| \leq \int_0^\infty t^N e^{-xt}dt = \frac{N!}{x^{N+1}}, \end{aligned}$$

vemos que efectivamente se cumple (2).

Otro ejemplo interesante, es la aproximación asintótica de la función de Airy:

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}}{2\pi i}\int_L e^{w^3/3 - wz}dw, \qquad |\mathrm{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3},$$

con L cualquiera de los caminos como L_1 (figura (2)) que comienza en infinito en el sector $-\pi/2 < \mathrm{Arg}w < -\pi/6$ y termina en infinito en el sector $\pi/6 < \mathrm{Arg}w < \pi/2$.

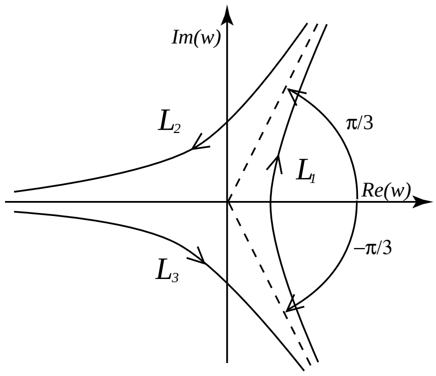

Figura 2: Caminos de integración en la definición de la función de Airy

La necesidad de obtener aproximaciones asintóticas de integrales más sofisticadas que la del ejemplo anterior, como son representaciones integrales de funciones especiales (distribuciones estadísticas o polinomios ortogonales clásicos en particular); transformadas de Fourier, Laplace, Hilbert,... en problemas de física o ingeniería; representaciones integrales de problemas de contorno; etc..., ha dado lugar al estudio de métodos de aproximación asintótica con los que obtener de forma más o menos sistemática, aproximaciones asintóticas de estas integrales.

No existe ni mucho menos un método general de desarrollo asintótico de integrales. Podríamos hablar de técnicas asintóticas diferentes para diferentes familias de integrales. Sin embargo, atendiendo a su desarrollo histórico se puede establecer una clasificación motivada por los distintos problemas que han ido surgiendo con la aparición de nuevos tipos de integrales de aproximación asintótica desconocida.

Las primeras técnicas asintóticas que corresponden a los *métodos clásicos*, se desarrollaron para obtener aproximaciones de las funciones especiales de la física matemática. Posteriormente, los *métodos uniformes* aparecieron al tratar problemas en los que la existencia de más de un parámetro asintótico invalidaba los desarrollos clásicos anteriores, como por ejemplo en problemas de perturbación singular. Los *métodos distribucionales* y *de sumabilidad* han aparecido para aproximar ciertas familias de transformadas integrales de convergencia lenta para las que los métodos anteriores no proporcionaban una respuesta satisfactoria. Recientemente, los métodos como *Continuación Analítica*, buscan unificar todos los métodos, una solución universal al problema de aproximación asintótica de integrales.

Referencias

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, *Dover Pub., New York*, 1972.

[2] R. A. Askey, Orthogonal polynomials and special functions, *S.I.A.M., Philadelphia*, 1975.

[3] N. Blestein and R. A. Handelsman, Asymptotic Expansions of Integrals, *Dover Pub., New York*, 1986.

[4] A. Erdelyi and M. Wyman, The asymptotic evaluation of certain integrals, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **14**, (1963) 217-260.

[5] F. W. J. Olver, Asymptotics and Special Functions, *Academic Press, New York*, 1974.

[6] N.M. Temme, Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics, *Wiley and Sons, New York* , 1996.

[7] W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, *Wiley, New York*, 1965.

[8] R. Wong, Asymptotic approximations of integrals, *Academic Press, New York*, 1989.