Implementación de pares encajados

Luis Rández

IUMA-Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Zaragoza

7 de abril de 2014

Resultados numéricos con el DP5(4)

Se trata de ver los resultados numéricos obtenidos con una implementación del par encajado de órdenes 4 y 5 de Dormand y Prince comprobando la validez de los fórmulas utilizadas para el cambio de paso.

También veremos como funciona la estimación del error local para el problema A3 del paquete DETEST para distintos valores de la tolerancia (TOL). Cuando $TOL \to 0$, la estimación del error local dada por el método de Dormand y Prince es asintóticamente correcta.

En las tablas siguientes, PA son los pasos aceptados, PF son los pasos fallados y eg es el máximo error global medido en cada paso de integración.

Problema 1. Problema discontinuo

Este problema está diseñado especialmente (por el exponente de $(t-10)$ en la función derivada) para ver la *robustez* del control del paso de integración de un par encajado de órdenes 4 y 5.

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 10 \\ 6(t-10)^5 & \text{si } t \geq 10 \end{cases},$$
$$y(0) = 0, \ \ t \in [0, 20]$$

TOL	PA/PF	eg	PA/PF	eg	PA/PF	eg
	$0.1 \leq r \leq 3,\ r_{\text{máx}} = 1$		$0.1 \leq r \leq 3$		$0 < r < \infty$	
10^{-2}	11/2	$1.34 \cdot 10^{-6}$	11/4	$1.39 \cdot 10^{-6}$	19/13	$1.16 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	13/3	$3.25 \cdot 10^{-7}$	14/5	$5.63 \cdot 10^{-7}$	28/20	$4.12 \cdot 10^{-7}$
10^{-4}	17/3	$9.27 \cdot 10^{-8}$	16/4	$1.55 \cdot 10^{-7}$	41/31	$1.63 \cdot 10^{-7}$
10^{-5}	22/3	$1.96 \cdot 10^{-8}$	23/6	$1.94 \cdot 10^{-8}$	63/48	$2.01 \cdot 10^{-8}$
10^{-6}	30/4	$4.82 \cdot 10^{-9}$	31/6	$4.97 \cdot 10^{-9}$	97/74	$4.09 \cdot 10^{-9}$
10^{-7}	42/4	$5.86 \cdot 10^{-10}$	44/7	$5.77 \cdot 10^{-10}$	152/116	$6.78 \cdot 10^{-10}$
10^{-8}	61/4	$7.90 \cdot 10^{-11}$	64/8	$7.47 \cdot 10^{-11}$	237/183	$8.82 \cdot 10^{-11}$

Problema 2. Otro problema discontinuo.

La función derivada es la función escalón unidad en $t = 1$. Si integramos en los subintervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$ parando en $t = 1$, no hay ningún problema, pero si se hace de forma automática, los resultados cambian bruscamente.

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} ,$$
$$y(0) = 1,\ t \in [0, 2]$$

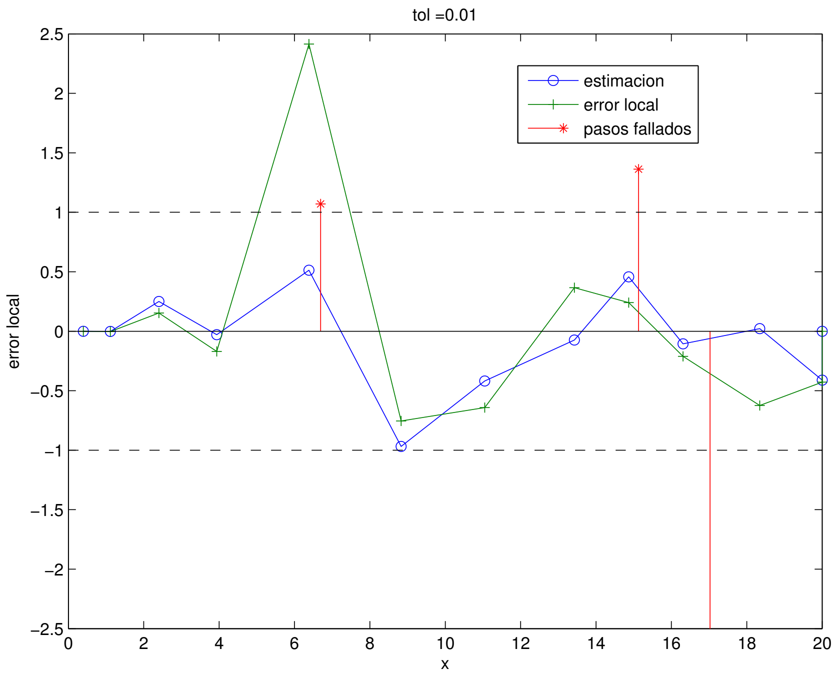
TOL	PA/PF	eg	PA/PF	eg	PA/PF	eg
	$0.1 \leq r \leq 3,\ r_{\text{máx}} = 1$		$0.1 \leq r \leq 3$		$0 < r < \infty$	
10^{-2}	3/0	$4.03 \cdot 10^{-2}$	3/0	$4.03 \cdot 10^{-2}$	2/0	$5.27 \cdot 10^{-1}$
10^{-3}	5/5	$6.24 \cdot 10^{-2}$	5/5	$6.24 \cdot 10^{-2}$	6/18	$7.57 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	13/12	$2.63 \cdot 10^{-4}$	10/13	$9.78 \cdot 10^{-3}$	7/24	$1.16 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	16/17	$4.06 \cdot 10^{-6}$	16/20	$4.42 \cdot 10^{-4}$	11/30	$4.30 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	19/12	$2.83 \cdot 10^{-5}$	19/18	$9.01 \cdot 10^{-5}$	13/32	$3.88 \cdot 10^{-5}$
10^{-7}	30/18	$5.91 \cdot 10^{-6}$	27/26	$7.52 \cdot 10^{-6}$	12/37	$9.90 \cdot 10^{-7}$
10^{-8}	29/16	$6.98 \cdot 10^{-7}$	35/25	$7.52 \cdot 10^{-7}$	27/79	$6.63 \cdot 10^{-7}$

Problema A3 (paquete DETEST)

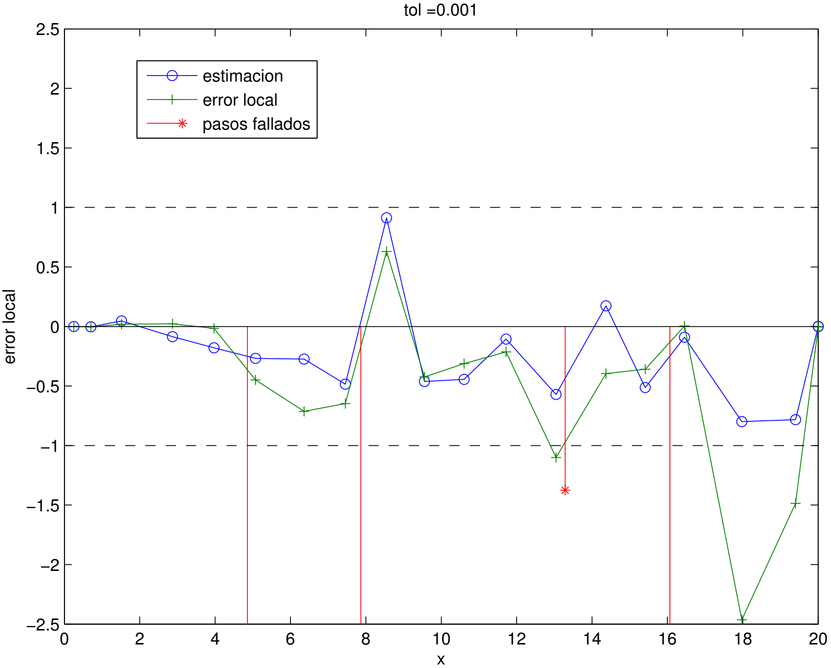
En este problema vamos a comprobar que la estimación del error local dada por el DP5(4) es asintóticamente correcta. Sea el PVI

$$\begin{cases} y' = y\cos t \\ y(0) = 1,\ t \in [0, 20] \end{cases}$$

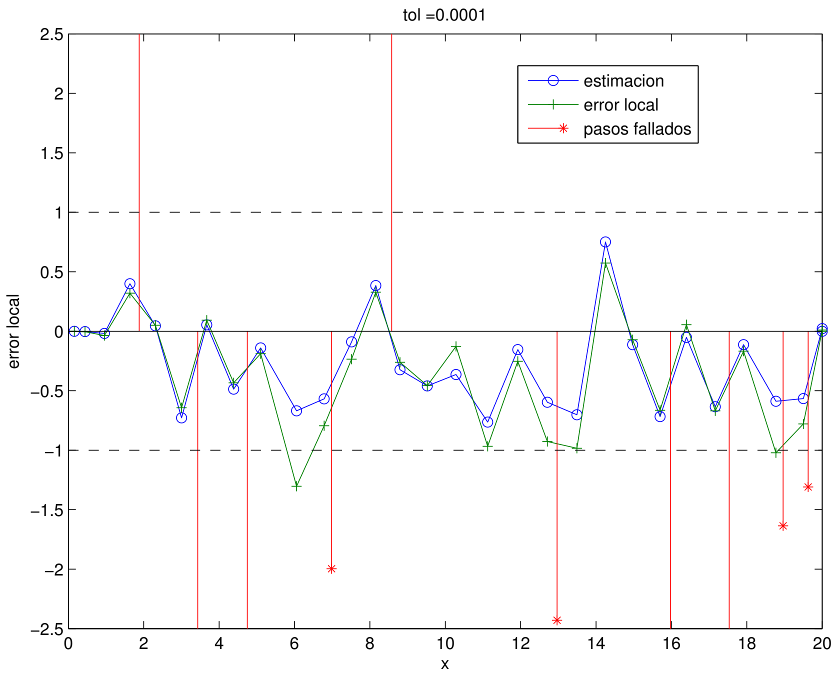
y lo integraremos para valores de la tolerancia EABS=EREL$=10^{-i}, i = 3, \ldots, 9$.



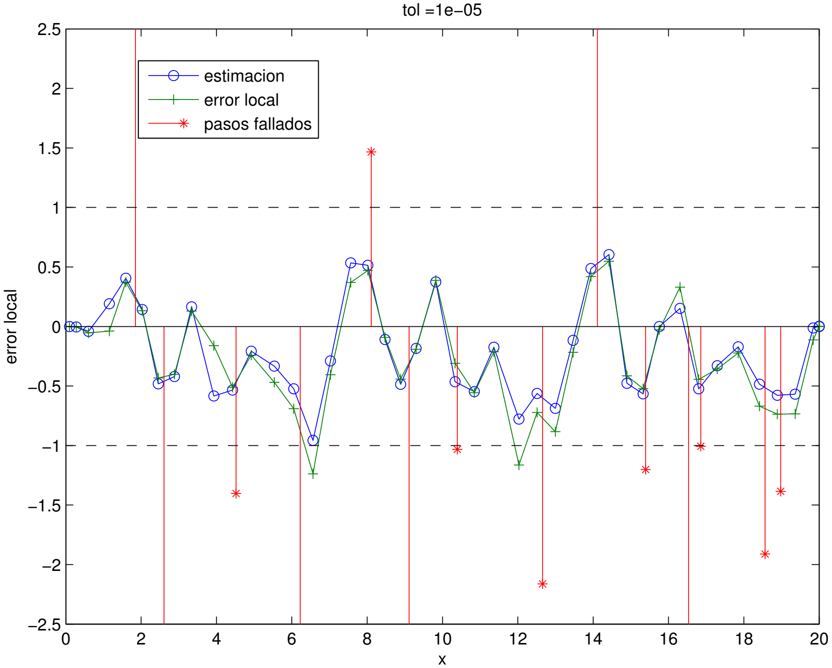
tol =0.01
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

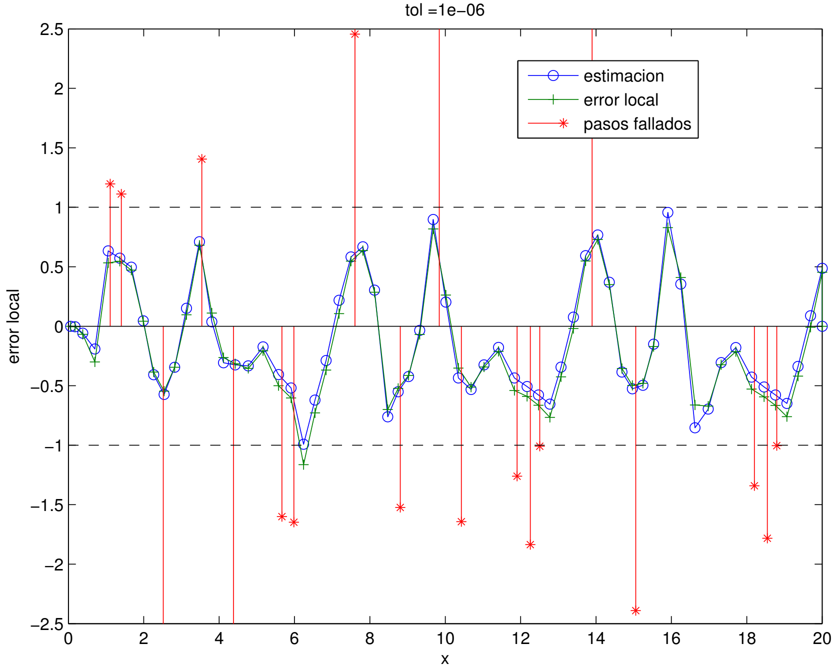


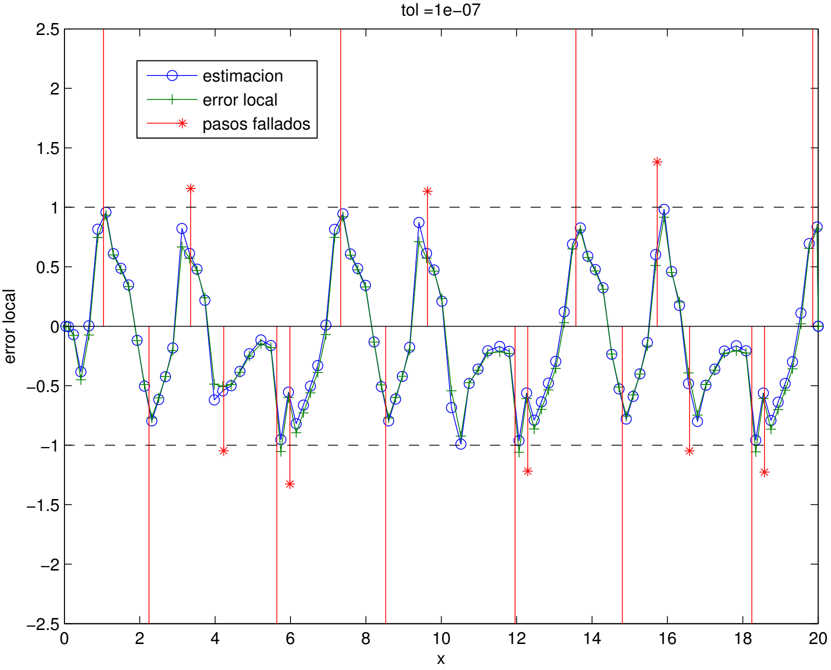
tol =0.001
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

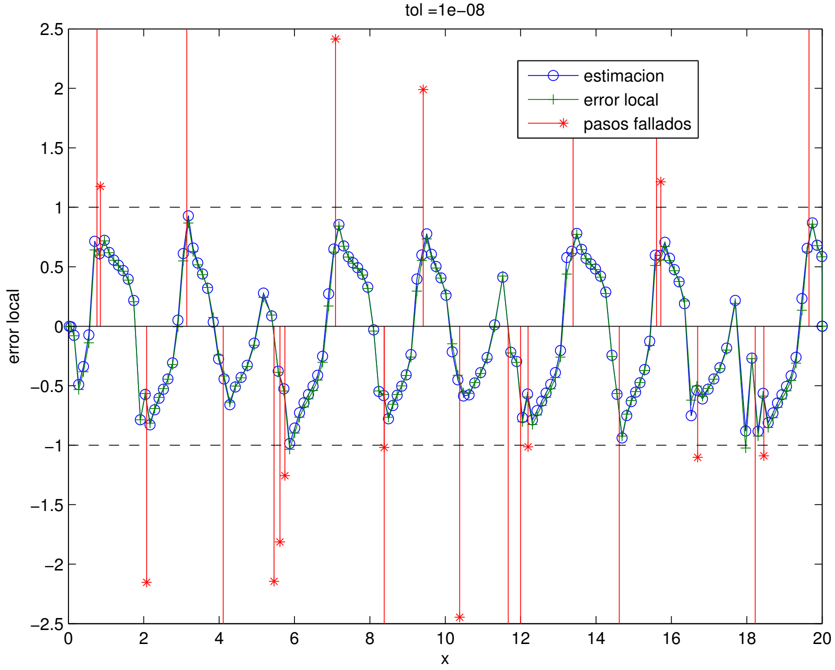


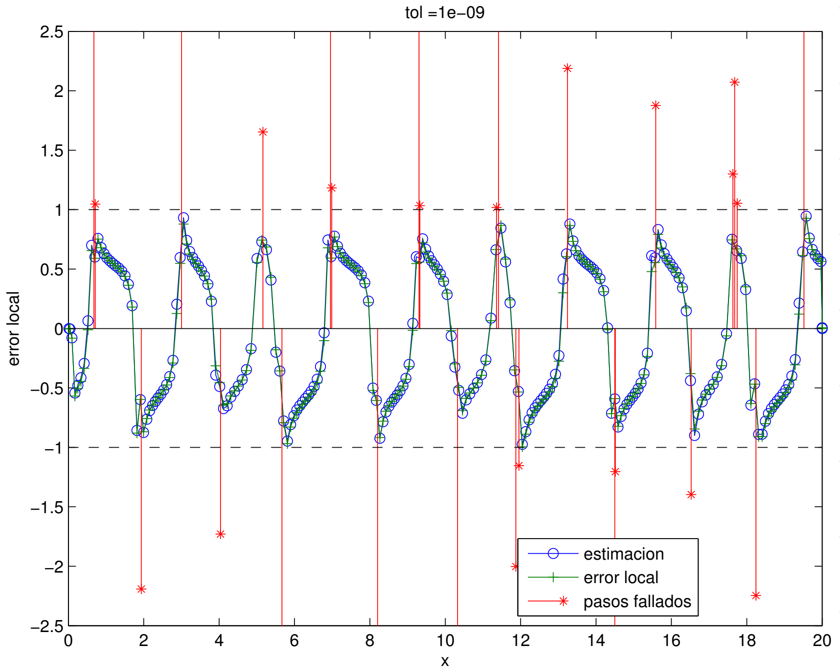
tol =0.0001
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

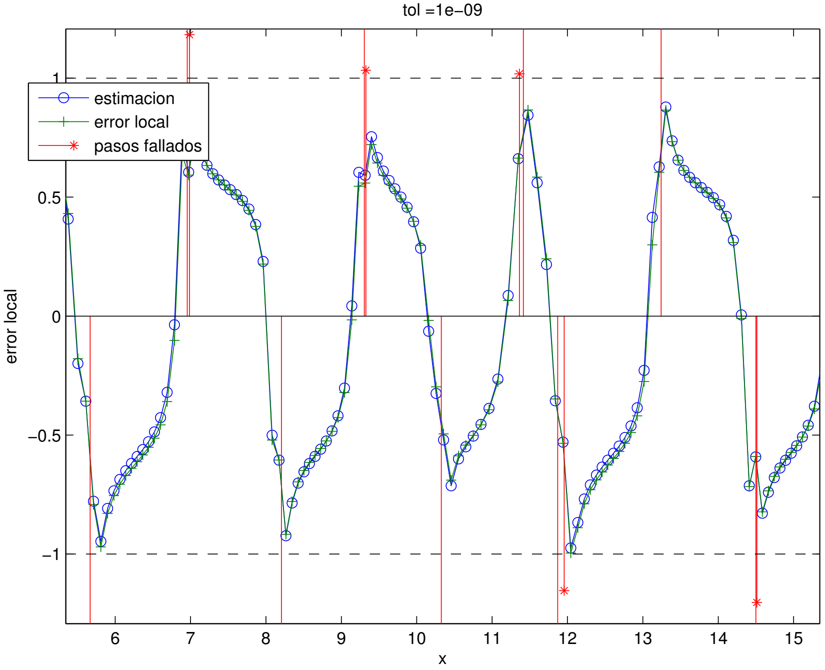

tol =1e−05
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


tol =1e−06
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


tol =1e−07
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x


tol =1e−08
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


tol =1e−09
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
error local
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x
estimacion
error local
pasos fallados



tol =1e−09
estimacion
error local
pasos fallados
error local
x
1
0.5
0
−0.5
−1
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15