Problemas Ampliación de Matemáticas.
Sistemas lineales

1.- Encontrar la factorización $L\,U$ de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

hallar la factorización $L\,U$ de A. Transformar la factorización anterior en la forma $A = L\ D\ \overline{U}$, donde D es una matriz diagonal y $\overline{U}$ es triangular superior con unos en la diagonal principal. Encontrar la relación entre las matrices L y $\overline{U}$. ¿ Puede asegurarse que la matriz A es definida positiva?. Hallar el determinante de A.
Detalla el proceso de eliminación con pivote parcial por filas sobre la matriz A.

3.- ¿ Puede llevarse a cabo la eliminación gaussiana sin intercambio de filas sobre la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}?.$$

4.- Resolver el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

por eliminación gaussiana
a) sin pivote
b) con pivote parcial

Halla la factorización LU de A.

5.- Resolver el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & -5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

por eliminación gaussiana
a) sin pivote
b) con pivote parcial

Halla la factorización de Cholesky de A.

6.- Resuelve el sistema $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

por eliminación Gaussiana con pivote parcial.

7.- Sean $\{1, -2, 3\}$, $\{1, -1\}$ y $\{-1\}$ los multiplicadores correspondientes a los lugares $\{(2,1), (3,1), (4,1)\}$, $\{(3,2), (4,2)\}$ y $\{(4,3)\}$, respectivamente, de la eliminación gaussiana para un sistema de orden 4, dando lugar al sistema triangular

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Halla el sistema original $Ax = b$.

8.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 6 & 11 & -3 & 18 \\ -2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & 7 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Halla las factorizaciones LU y LDU de A.

b) Resuelve $Ax = b$, con $b = (0, 3, 1, 1)^T$, resolviendo para ello dos sistemas triangulares. Idem para $b = (18, 55, -12, 34)^T$.

9.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Halla la factorización LU de A.

b) Resuelve $Ax = b$, con $b = (1, 1, 1, 1)^T$, resolviendo para ello dos sistemas triangulares. Idem para $b = (4, 7, -2, 3)^T$.

10.- Resolviendo un sistema lineal $Ax = b$ con A simétrica definida positiva por el método de Cholesky se llega al final a la resolución del sistema

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ y + z &= -1 \\ 2z &= 2. \end{aligned}$$

Halla el sistema original.

11.- Hallar los coeficientes de un polinomio de segundo grado $p_2(x)$ de manera que $p_2(1) = 1$, $p_2(2) = 2$ y $p_2(3) = 0$.

12.- Estudiar que condición debe verificarse para que el método de Gauss–Seidel, partiendo de $x_0 = 0$, de la solución exacta en la primera iteración.

13.- Considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿ Puede aplicarse Jacobi o Gauss–Seidel para resolver este sistema ?. Encontrar un sistema equivalente al que si se le pueda aplicar.

14.- Sea el sistema lineal $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz de Jacobi y de Gauss–Seidel para calcular el radio espectral, calculando las dos primeras iteraciones para cada método tomando como vector inicial el vector nulo. Encontrar la relación entre los radios espectrales de Jacobi y Gauss–Seidel.

15.- Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel cuando se aplican a la resolución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiar la convergencia del sistema anterior cuando se intercambian la segunda y tercera ecuación.

16.- Demostrar que para el sistema

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

una condición necesaria y suficiente de convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss–Seidel es $|bc| < |ad|$. ¿En qué caso es más rápida?.

17.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & a \\ 0 & 2 & ab \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la relación entre a y b para que A sea regular. Probar que, si $ab^2 \in (-24, 24)$, entonces el método de Gauss–Seidel es convergente para A.
b) Tomando $a = b = 1$, y partiendo de $x^{(0)} = (1, 1, 1)$, aplicar el método de Jacobi para hallar $x^{(3)}$, aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, con $b^T = (3, 7, 12)$ ¿Cuál es la solución exacta?

18.- Hallar las tres primeras iteraciones para resolver el sistema $Ax = b$, donde $b^T = (1/2, -1/2, 0)$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

por Gauss-Seidel, tomando $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

19.- Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la relación entre b y c para que A sea regular.
b) Probar que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen o divergen exactamente para los mismos valores de b y c.
c) En caso de converger, ¿cuál lo hace más rápidamente?.

20.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para resolver un sistema $Ax = b$.

21.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

estudiar si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen.
a) Partiendo de $x^{(0)} = (1/2, 1/2, 1/2)$, aplicar ambos métodos para hallar $x^{(2)}$, aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, con $b^T = (1, 0, 1)$.

22.- Queremos resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mediante un método iterativo. Indica si convergen los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. En los casos en que exista convergencia halla dos iteraciones partiendo del vector nulo.

23.- Queremos resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}$$

mediante un método iterativo. Halla los radios espectrales de los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel. Halla los valores de a para los que convergen cada uno de dichos métodos.

24.- Queremos resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix},$$

mediante un método iterativo. Demuestra que convergen los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel e indica cuál lo hace más rápidamente. En los dos casos halla dos iteraciones partiendo del vector nulo.

25.- Queremos resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mediante un método iterativo. Indica si convergen los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. En los casos en que exista convergencia halla dos iteraciones partiendo del vector nulo.

Ecuaciones no lineales

1.- Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - 1$ tiene una única raíz en $I\!R$.

2.- Considerar la ecuación no lineal $f(x) = e^{2x} + 3x + 2$. Probar que $f(x)$ tiene una única raíz en $I\!R$. Determinar un intervalo en el que se encuentre y aplicar 3 iteraciones del método de bisección.

3.- Demostrar que los polinomios de la forma $x^n + x + 1$ no tienen ningún cero real si n es par, y tienen exactamente uno si n es impar.

4.- Se quiere calcular una raíz de la ecuación $f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$ en el intervalo $[1/4, 1/2]$.

i) Estudia la existencia y unicidad de la misma en dicho intervalo.

ii) Aplica cinco iteraciones del método de bisección. Calcula una cota sobre el error cometido. Halla el número de iteraciones necesarias para que el error absoluto sea menor que 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} y 10^{-10}.

5.- Repetir el ejercicio anterior para la función $f(x) = x^3 + 5e^x + 3 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$.

6.- En Astronomía se conoce como ecuación de Kepler a la siguiente expresión

$$m = x - e\ \text{sen}(x), \quad 0 < e < 1,$$

Demostrar que para cada $m \in (0, \pi)$ existe un único x que satisface dicha ecuación.

7.- El método de Newton para resolver cierta ecuación $f(x) = 0$ viene dado por

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2\ x_n - 1}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Determinar la función $f(x)$.

8.- Utilizando el método de Newton para resolver la ecuación $x^2 = a$, con $a > 0$, deducir el algoritmo siguiente para calcular la raíz cuadrada de a:

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \neq 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

9.- Demostrar que el método de Newton para calcular una raíz de multiplicidad k de un polinomio $p(x)$ tiene convergencia lineal. Sin embargo, si se modifica el método de Newton de la forma

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1} = x_n - k\dfrac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

vuelve a tener convergencia cuadrática.

10.- Demostrar que la función $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ tiene los mismos ceros que $f(x)$, pero simples.

11.- Considerar la función $f(x) = 1/x - a$. Aplicar el método de Newton, viendo que no es preciso realizar ninguna división. Hallar la relación entre el error $e_{n+1} = x_{n+1} - 1/a$ y e_n.

Aproximación por mínimos cuadrados

1.- Encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.- En 1601 el astrónomo alemán J. Kepler formuló su tercera ley del movimiento planetario, $T = c\, d^{3/2}$, donde d es la distancia de un planeta al sol medida en millones de kilómetros, T es el periodo orbital en días, y c es una constante. Los datos observados (d_i, T_i) para los primeros cuatro planetas Mercurio, Venus, Tierra y Marte son: $(58, 88)$, $(108, 225)$, $(155, 365)$ y $(228, 687)$. Obtener el valor de c que ajusta a estos datos en el sentido de los mínimos cuadrados.

3.- Considerar el conjunto de puntos (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ con abcisas distintas. Probar que las ecuaciones normales correspondientes al ajuste en el sentido de mínimos cuadrados son:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}.$$

4.- Hallar la recta y la parábola de mínimos cuadrados relativa al conjunto de datos $(-1, 10)$, $(0, 9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 0)$ y $(6, -1)$.

5.- Ajustar el valor de la constante de la gravedad g en la fórmula $d = 0.5gt^2$, donde d es la distancia en metros y t es el tiempo en segundos a partir de los siguientes datos (t_i, d_i): $(0.2, 0.1960)$, $(0.4, 0.7850)$, $(0.6, 1.7665)$, $(0.8, 3.1405)$ y $(1.0, 4.9075)$.

6.- Para las observaciones $(0, 3, 12)$ en los tiempos $(0, 1, 2)$, dibujarlas en un plano y hallar

a) La mejor recta horizontal

b) La mejor recta

c) La mejor parábola