

Ecuaciones diferenciales

1. Hallar las isoclinas y esbozar las soluciones relativas a las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) $y' = y/x^2$.

(c) $y' = y - x$.

(d) $y' = y/x$.

(e) $y' = -x/y$.

2. Hallar las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas:

1.- $y = Cx$,

2.- $y = Cx^2$,

3.- $Cx^2 + y^2 = 1$,

4.- $y = Ce^{-x}$,

5.- $y^2 = Cx^3$,

6.- $y = x/(1 + Cx)$,

7.- $2x^2 + y^2 = 4Cx$,

8.- $y^3 + 3x^2y = C$,

9.- $y = C/(1 + x^2)$,

10.- $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$,

3. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separadas

1.- $(1 + x) dx = x^2 y^2 dy$,

2.- $dy = e^{3x+2y} dx$,

3.- $(4y + yx^2) dy - (2x + xy^2) dx = 0$,

4.- $2y(1 + x) dy = x dx$,

5.- $y \log x \frac{dx}{dy} = \frac{(y + 1)^2}{x^2}$,

6.- $dS = kS dr$,

7.- $\frac{dP}{dt} = P(1 - P)$,

8.- $\sec^2 x dy + \operatorname{cosec} y dx = 0$,

9.- $e^y \operatorname{sen} x dx + \cos x (e^{2y} - y) dy = 0$,

10.- $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$,

11.- $\frac{dN}{dt} + N = Ne^{t+2}$,

12.- $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x (\cos 2y - \cos^2 y)$,

13.- $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 5x - y - 5}{xy - x - y + 1}$,

14.- $x\sqrt{1 - y^2} dx = dy$,

15.- $(e^x + e^{-x}) dy = y^2 dx$,

16.- $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + 2y^2}{y \operatorname{sen} x}$.

4. Resolver los problemas de valor inicial

(a) $\operatorname{sen} x (e^{-y} + 1) dx = (1 + \cos x) dy$, $y(0) = 0$.

(b) $y \, dy = 4x\sqrt{1+y^2} \, dx, \quad y(1) = 0.$

(c) $\frac{dx}{dy}4(x^2+1), \quad x(\pi/4) = 1.$

(d) $x^2y' = y - xy, \quad y(-1) = -1.$

(e) $(1+x^3)y' = x^2, \quad y(1) = 2.$

(f) $y' = \sqrt{y}, \quad y(2) = 0.$

5. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$, sujeta a las condiciones iniciales a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$, c) $y(0) = 2$.

6. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1.- $y' = 4y,$

2.- $2\frac{dy}{dx} + 20y = 17,$

3.- $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x},$

4.- $y' + 3x^2y = x^2,$

5.- $x^2y' + xy = 1,$

6.- $(x + 4y^2) \, dy + 2y \, dx = 0,$

7.- $x \, dy = (x \cos x - y) \, dx,$

8.- $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + e^xy = 0,$

9.- $\cos x \frac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1,$

10.- $x\frac{dy}{dx} - y = e^x,$

11.- $x^2y' + x(x+2)y = e^x,$

12.- $y \, dx + (xy + 2x - ye^y) \, dy = 0,$

13.- $x\frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x},$

14.- $y \, dx - 4(x + y^6) \, dy = 0.$

7. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy,$ Newton (año 1671).

(b) $y' = 1 + y + xy + x^2y + x^3y,$ Newton (año 1671).

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Hallar la curva que pasa por el punto $(0, -2)$ y tal que la pendiente de la tangente en cada punto de la misma es igual a la ordenada de dicho punto más tres unidades.
2. En un cultivo de bacterias, la velocidad de crecimiento es proporcional al número presente en cada momento.
 - (a) Si se sabe que el número se duplica en 4 horas, calcular el número de bacterias al cabo de 12 horas.
 - (b) Si hay 10^4 bacterias al cabo de 3 horas y 4×10^4 al cabo de 5 horas, hallar el número de bacterias en el instante inicial.
3. Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a la que se enfría una sustancia en un medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio. Si la temperatura del medio es de 30° y la sustancia se enfría de 100° a 70° en 15 minutos:
 - (a) Calcular el instante de tiempo en el que la temperatura de la sustancia es 40° .
 - (b) Calcular la temperatura de la sustancia al cabo de 2 horas.
4. Un paracaidista cae con una velocidad de 53.65 m/sg cuando su paracaídas se abre. Si la resistencia del aire es $pv^2/256$ donde p es el peso total del hombre y del paracaídas, hallar su velocidad como una función del tiempo t después de abierto el paracaídas.
5. En un trozo de madera quemada se encontró que el 85.5% de carbono-14 se había desintegrado. Determinar la edad aproximada de la madera. (La semivida del carbono-14 es de 5600 años).
6. La altura h del nivel de agua que fluye por un orificio situado en el fondo de un depósito cilíndrico se expresa por la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh}$$

donde $g = 32$ pies/sg² (gravedad) y A_1 y A_2 son las áreas transversales del depósito y del orificio respectivamente. Si al empezar a contar el tiempo la altura del depósito es de 20 pies, hallar el instante de tiempo en el que queda vacío. ($A_1 = 50$ pies² y $A_2 = 0.25$ pies²).

7. Un tanque de 1000 litros está lleno de salmuera que contiene 60 kilos de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 20 litros por minuto y la mezcla, conservada uniformemente por agitación, sale a la misma velocidad. Hallar la sal que queda en el tanque después de una hora.
8. Se está formando una sustancia C por la reacción de dos sustancias A y B , de forma que a gramos de A y b gramos de B forman $a + b$ gramos de C . Si inicialmente hay x_0 gramos de A , y_0 gramos de B y ninguno de C , y si la velocidad de formación de C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no se han combinado, expresar la cantidad, z gramos, de C formada en función del tiempo t .

Ecuaciones diferenciales de orden superior

1. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0, \quad \lambda > 0,$$

estudiar el comportamiento de la solución en función de las raíces de la ecuación característica.

2. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= F_0 \text{sen}(\gamma t), \quad F_0 \text{ constante,} \\ y(0) &= y'(0) = 0 \end{aligned}$$

cuando $\gamma \neq \omega$ y cuando $\gamma = \omega$. En cada caso, hallar $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$.

3. Una curva integral $y = u(x)$ de la ecuación diferencial $y'' - 3y' - 4y = 0$ corta a una curva integral $y = v(x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y' - 5y = 0$ en el origen. Determinar las funciones u y v si las dos curvas tienen la misma pendiente en el origen y si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v^4(x)}{u(x)} = 5/6.$$

4. Sabiendo que la ecuación diferencial $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y_1(x) = u(x)$ e $y_2(x) = xu(x)$, donde $u(0) = 1$, determinar $u(x)$ y $Q(x)$ en función de x .

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + y &= \exp^x / (1 + x^2), \\y'' + 2y' + y &= \exp^{-x} \log x, \\4y'' - 4y' + y &= 8\exp^{-x} + x, \\y'' + 2y' - 8y &= 2\exp^{-2x} - \exp^{-x}, \\4y'' + 16y &= \cos(2t), \\y'' - 4y' + 13y &= 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \\4y'' + 36y &= \operatorname{cosec}(3t), \\y'' + y &= \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x\end{aligned}$$

6. Hallar la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 \exp^{2x}, \quad x > 0,$$

sabiendo que la ecuación homogénea tiene una solución de la forma $y(x) = \exp^{mx}$.

7. Hallar la solución general de la ecuación

$$4x^2y'' + 4xy' - y = 0, \quad x > 0.$$

8. Hallar la solución general de

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2, \quad x > 1,$$

sabiendo que la ecuación homogénea tiene una solución de la forma $y = x^m$.