Problemas Matemáticas. Grado en Químicas

---

1 Interpolación

1. Hallar el número de operaciones en la evaluación de un polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ por el método estándar y el de Horner.

2. Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange y de Newton en los datos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$. Escribirlos en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$ para verificar que son idénticos.

3. Calcular el polinomio de grado menor o igual que 3 que interpole a una función f impar, tal que $f(1) = 2$ y además verifique:
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

4. El polinomio $p_3(x) = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1)$ interpola a los primeros cuatro datos de la tabla

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	2	1	2	-7	10

   Añadir un término más a $p_3(x)$ de manera que el polinomio resultante interpola a la tabla entera.

5. Encontrar las fórmulas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para los siguientes datos:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	0	1	-1

   Escribir ambos en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$ para ver que son idénticos.

6. Halla el polinomio de interpolación para los siguientes datos:

   (a) $\boxed{f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f'(1) = 0}$

   (b) $\boxed{f(-1) = 2 \quad f'(-1) = -1 \quad f(2) = 1 \quad f'(2) = 0}$

7. Demostrar que en el problema de interpolación de Lagrange se verifican las siguientes propiedades:

   a) Los polinomios de la base de Lagrange verifican

   $$\sum_{k=0}^{n} L_{n\,k}(x) = 1.$$

   b) Si $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (distintos), entonces, el error puede escribirse como:

   $$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(x_k))\, L_{n\,k}(x).$$

8. Hallar el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 a la función $f(x) = \cos(x)$ en los puntos $x = 0, 1/2, 1$. Calcular el error de interpolación y dar una cota del error cometido en $x = 3/4$.

9. Sea la tabla de datos

x_i	0	0.2	0.4	0.6
$f(x_i)$	1.0000	1.2214028	1.4918247	1.8221188

   correspondientes a la función $f(x) = \mathrm{e}^x$.

   a) Para la interpolación lineal en $x = 1/3$ que intervalo tomarías. Da una cota del error absoluto y compara con el resultado exacto.

   b) Calcula el polinomio de interpolación de grado ≤ 3, dando una cota del error cometido y comparando con el resultado exacto.

   c) Aproxima el valor de $\exp(4/5)$ con el polinomio de interpolación cúbico hallando el error. Razona a que es debido que el error anterior sea tan grande comparado con el obtenido en b).

10. Calcular el polinomio de grado ≤ 4 que interpola a $f(x) = \cos(x)$ en los nodos 0, 1, 2, 3 y 4.

11. Hallar el valor de la siguientes sumas:

a) $1 + 2 + \cdots + n$
b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$
c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

12. Hallar el siguiente valor en las sucesiones

   a) 7, 18, 29, 40, 51, 62, ...
   b) 13, 1, 49, 40, 76, 70, 94, 91, ...

2 Ecuaciones no lineales

1. Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - 1$ tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.

2. Considerar la ecuación no lineal $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3x + 2$. Probar que $f(x)$ tiene una única raíz en $\mathbb{R}$. Determinar un intervalo en el que se encuentre y aplicar 3 iteraciones del método de bisección.

3. Se quiere calcular una raíz de la ecuación $f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$ en el intervalo $[1/4, 1/2]$.

   - Estudia la existencia y unicidad de la misma en dicho intervalo.
   - Aplica cinco iteraciones del método de bisección. Calcula una cota sobre el error cometido. Halla el número de iteraciones necesarias para que el error absoluto sea menor que 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} y 10^{-10}.

4. Encontrar una función que tenga una raíz en $\sqrt{30}$. Buscar un intervalo de longitud menor o igual que 1 que localice la raíz y donde se pueda garantizar la convergencia del método de Newton. Aplicar tres iteraciones comenzando con cada uno de los extremos.

5. Repetir el ejercicio anterior para la función $f(x) = x^3 + 5\mathrm{e}^x + 3 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$.

6. En Astronomía se conoce como ecuación de Kepler a la siguiente expresión

$$m = x - e\ \mathrm{sen}(x), \quad 0 < e < 1,$$

   Demostrar que para cada $m \in (0, \pi)$ existe un único x que satisface dicha ecuación.

7. El método de Newton para resolver cierta ecuación $f(x) = 0$ viene dado por

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2\,x_n - 1}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

   Determinar la función $f(x)$.

8. Utilizando el método de Newton para resolver la ecuación $x^2 = a$, con $a > 0$, deducir el algoritmo siguiente para calcular la raíz cuadrada de a:

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario } \neq 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

9. Considerar la función $f(x) = 1/x - a$. Aplicar el método de Newton, viendo que no es preciso realizar ninguna división. Hallar la relación entre el error $e_{n+1} = x_{n+1} - 1/a$ y e_n.

10. Una persona pide un crédito de 10000 € a 15 años pagando una mensualidad de 80 €. Hallar el tipo de interés.

11. El crecimiento de una población de bacterias, en función del tiempo t, está dado por
$$p(t) = 100\,\mathrm{e}^{0.1t} - 0.005t$$
Determinar el instante en el que la población sea de 500.

12. Determinar las ecuaciones reales para la iteración $z_{k+1} = z_k^2 + 2$, siendo z complejo.

13. Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ partiendo de $x_0 = 0.5$ y de $x_0 = 2$.

14. Aplicar el método de Newton al polinomio $p(x) = x^3 - x - 3$ con $x_0 = 0$. ¿Que es lo que ocurre?.

3 Integración

1. Demostrar que la función $f(x) = x$ es integrable en $[0, b]$.

2. Calcular las siguientes primitivas

$$\int \sqrt{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{\log x}{x}\ \mathrm{d}x \qquad \int (2x+1)^n\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x \qquad \int \sqrt{x+2}\ \mathrm{d}x \qquad \int \tan x\ \mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{5x}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{3x-7}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{2x^2+5}\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\ \mathrm{d}x \qquad \int (x+2)\mathrm{e}^{x^2+4x-5}\ \mathrm{d}x$$

$$\int (4-x^{2/3})^3\ \mathrm{d}x \qquad \int (\frac{\sqrt{x}}{x} - 3x^{4/3} + 1)\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\int x \operatorname{arctag}(x)\ \mathrm{d}x \qquad \int x^3 \log x\ \mathrm{d}x \qquad \int \operatorname{arcsen}(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int x\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \qquad \int x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \qquad \int x\cos x\ \mathrm{d}x$$

$$\int x^2\cos x\ \mathrm{d}x \qquad \int (3x^2-4x-1)\cos x\ \mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{e}^x\cos x\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x(x+1)(x^2-4)}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{x^2-3x-4}\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\ \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x^3+x}\ \mathrm{d}x$$

3. Calcular las siguientes primitivas aplicando la regla de Barrow:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\ \mathrm{d}x \qquad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}x \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}\ \mathrm{d}x$$

4. Calcular las siguientes integrales

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ con } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ x & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \frac{x}{|x|}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$$

5. Hallar $F'(x)$ en los casos siguientes

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad F(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad F(x) = \int_{\cos x}^0 \frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$$

6. Hallar la aproximación lineal y la cuadrática de la función $f(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{10}{1+t}\,\mathrm{d}t$ en el origen.

7. Hallar la longitud de los siguientes arcos de curva

$$f(x) = \sqrt{x^3}, \text{ en } [0,4]$$

$$f(x) = x^2, \text{ en } [0,3]$$

$$f(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), \text{ en } [0,4\pi]$$

4 Integral doble

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$$\int_1^2 \int_{-x^2}^{x^2} (8x - 10y + 2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x, \quad \text{sol: } 208/3$$

$$\int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x + y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad \text{sol: } -4/21$$

$$\int_1^2 \int_1^y \frac{y}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad \text{sol: } -3/4 + \log 4$$

$$\int_\pi^{2\pi} \int_0^x (\cos x - \operatorname{sen} y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x, \quad \text{sol: } 2 - \pi$$

2. Calcular $\iint_D (x^2 + xy + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, donde D es el rectángulo: $a \leq x < b$, $c \leq y < d$.

3. $\iint_D x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, donde D es un triángulo cuyos vértices son los puntos $O(0,0)$, $A(1,1)$ y $O(0,1)$.

4. $\iint_D \mathrm{e}^{x/y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, donde D es el triángulo mixtilíneo OAB, limitado por la parábola $y^2 = x$ y por las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

5. Calcular las siguientes integrales y dibuje los recintos a que se extienden

$$a) \quad \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^{1+\cos x} y^2 \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}y, \qquad b) \quad \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \int_{\cos x}^1 y^4\, \mathrm{d}y.$$

6. Calcular el valor de $\iint_D (x^2 + 2y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, sobre el área plana limitada por $y = x$, y la parábola $y = 4x - x^2$.

7. Calcular $\iint_D (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, siendo D la región limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y el intervalo $x \in [0, \pi]$.

8. Hallar el valor de $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, extendida al primer cuadrante de $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Calcular $\iint_D x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, siendo D la región determinada por las siguientes condiciones:

$$D = \{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 10, \quad xy = 3\}.$$

10. Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, siendo D la región determinada por las siguientes condiciones:

$$D = \{x^2 + y^2 - x < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0, \quad y > 0\}.$$

11. Calcular $\iint_D x \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, siendo D la región

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2, \quad r < R\}.$$

12. $\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo D la región delimitada por

$$\{x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x\}.$$

13. En los siguientes problemas, dibujar la región de integración de la integral iterada

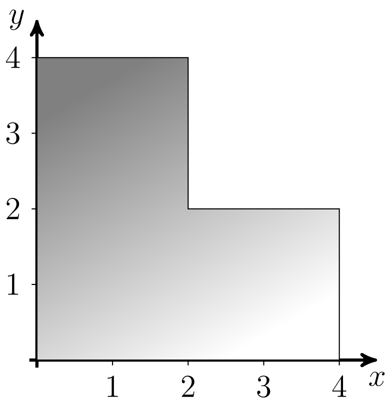
$$(a)\ \int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad (c)\ \int_{-1}^3 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

$$(b)\ \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (d)\ \int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{x^2+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

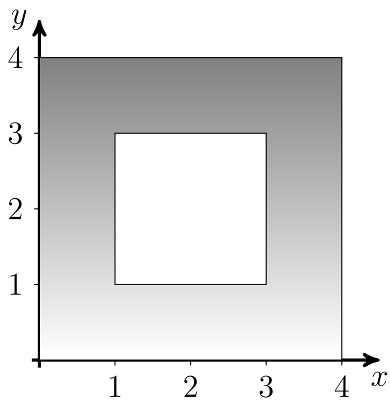
14. En los siguientes problemas evalúa la integral doble en la región $\mathcal{R}$ limitada por las gráficas de las ecuaciones indicadas. Elegir el orden de integración más conveniente:

$\iint_{\mathcal{R}} x^3y^2\,\mathrm{d}A,$	$y = x, y = 0, x = 1,$	sol: $1/21$
$\iint_{\mathcal{R}} (2x+4y+1)\,\mathrm{d}A,$	$y = x^2, y = x^3$	sol: $25/84$
$\iint_{\mathcal{R}} 2xy\,\mathrm{d}A,$	$y = x^3, y = 8, x = 0,$	sol: 96
$\iint_{\mathcal{R}} \dfrac{y}{1+xy}\,\mathrm{d}A,$	$y = 0, y = 1, x = 0, x = 1,$	sol: $\log 4 - 1$

15. En los siguientes problemas evalúa $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\,\mathrm{d}A$, donde $\mathcal{R}$ es la región indicada



sol: 40



sol: 48

16. En los siguientes problemas aplicar una integral doble para determinar el área de la región $\mathcal{R}$ limitada por las gráficas de las ecuaciones indicadas

(a)	$y = -x, y = 2x - x^2$	sol: $9/2$
(b)	$y = \mathrm{e}^x, y = \log x, x = -1, x = 4$	sol: $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e} + 3 - 4\log 4$
(c)	$y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$	sol: $63/4$

17. Mediante una integral doble, calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

18. En los siguientes problemas invierte el orden de integración

$$(a)\quad \int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \text{sol:} \quad \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$(b)\quad \int_0^3 \int_1^{e^x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad \text{sol:} \quad \int_0^{e^3} \int_{\log y}^3 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(c)\quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad \text{sol:} \quad \int_0^1 \int_{y^2}^{3-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

19. Halla el valor de las siguientes integrales dobles siendo $\mathcal{R}$ la región indicado por la ecuaciones dadas

$$(a)\quad \iint_{\mathcal{R}} xy\,\mathrm{d}A, \qquad y = x^2, y = 1, \qquad \text{sol: } 0$$

$$(b)\quad \iint_{\mathcal{R}} (x^2+2y)\,\mathrm{d}A, \quad y = x^2, y = \sqrt{x} \qquad \text{sol: } \frac{27}{70}$$

$$(c)\quad \iint_{\mathcal{R}} \operatorname{sen}(y^3)\,\mathrm{d}A, \quad y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0, \quad \text{sol: } \frac{1-\cos 8}{3}$$

20. En los siguientes problemas determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas

(a)	$2x+y+z=6, x=0, y=0, z=0,$ primer octante,	sol: 18
(b)	$x^2+y^2=4, x-y+2z=4, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0,$	sol: 2π
(c)	$z=1+x^2+y^2, 3x+y=3, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0,$	sol: 4
(d)	El tetraedro acotado por los planos coordenados y $z=6-2x-3y,$	sol: 6
(e)	El sólido del primer octante limitado por $9x^2+4y^2=36$ y $3x+4y-6z=0$	sol: 10
(f)	El sólido del primer octante acotado por la superficie	sol: 10

21. Hallar el volumen limitado por la *silla de montar*, $z = y^2 - x^2$ en el dominio $[0,1]\times[0,1]$. Sol: 1/6.

    En los problemas siguientes evaluar el volumen comprendido entre las gráficas de las ecuaciones indicadas

$$(a)\quad x+2y+z=4, z=x+y, x\geq 0, y\geq 0 \quad \text{sol: } 16/9$$

$$(b)\quad z=x^2, z=-x+2, x\geq 0, y\geq 0, y=5, \quad \text{sol: } 35/6$$

22. Pasando a coordenadas polares, calcular la siguiente integral doble $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, que se extiende al recinto limitado or la circunferencia $x^2+y^2=2ax$.

23. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, sobre el círculo D de centro O y radio R.

24. Calcular $\iint_D \mathrm{e}^{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, donde D es un círculo de centro O y radio R.

25. Evalúa las siguientes integrales iteradas

$$(a)\quad \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r^2\operatorname{sen}\theta\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\theta \quad \text{sol: } 1/12$$

$$(b)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\theta \quad \text{sol: } 4/9$$

26. En los siguientes problemas, calcula el área de la región $\mathcal{R}$ dada, haciendo primero un dibujo de la región.

   (a) La región interior a la circunferencia $r = 4\cos\theta$ y exterior al círculo $r = 2$ — sol: $2\sqrt{3} + 4\pi/3$

   (b) $\mathcal{R}$ es un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$ — sol: $\pi/2$

   (b) $r = 3 + 3\operatorname{sen}\theta$ — sol: $27\pi/2$

27. En los siguientes problemas, evalúa las integrales utilizando coordenadas polares. Dibuja primero la región de integración

$$(a)\quad \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\;\mathrm{d}A \quad \text{en } x^2+y^2 \le 4 \qquad \text{sol: } \pi(e^4-1)$$

$$(b)\quad \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(4-x^2-y^2\right)^{-1/2}\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \qquad \text{sol: } \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{2}$$

$$(c)\quad \int_{-3}^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \qquad \text{sol: } 9\pi$$

$$(d)\quad \int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x + \int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \qquad \text{sol: } 3\pi/8$$

28. En los siguientes problemas localiza el centro de masas de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas

$$(a)\quad x=0, x=4, y=0, y=3, \quad \rho(x,y)=xy \qquad \text{sol: } \left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

$$(b)\quad y=x^2, x=1, y=0, \quad \rho(x,y)=x+y \qquad \text{sol: } \left(\frac{17}{21}, \frac{55}{147}\right)$$

29. Halla el centro de masas de la región limitada por $y = 1-x^2$, $y = 0$ y cuya densidad es proporcional a la distancia al eje de abscisas.
sol: (0, 4/7)

30. Halla el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$. sol: $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\pi}{4}$

31. Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el plano $z = 2+2x+2y$. sol: 8π

32. En los siguientes problemas determina el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas:

    (a) Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$. sol: $\dfrac{25\pi}{3}$

    (b) $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$ en el primer octante. sol: $\dfrac{5}{4}$

5 Integral curvilínea

1. Calcular las siguientes integrales de línea $\int_\sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, donde
   (a) $f(x,y,z) = x+y+z$, con $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (b) $f(x,y,z) = \cos z$, siendo $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $f(x,y,z) = x\cos z$, con $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, con $t \in [0,1]$.
   (d) $f(x,y,z) = \exp(z)$, con $\sigma(t) = (1, 2, t^2)$, con $t \in [0,1]$.
   (e) $f(x,y,z) = yz$, con $\sigma(t) = (t, 3t, 2t)$, con $t \in [1,3]$.
   (f) $f(x,y,z) = (yz)x+y)/(y+z)$, con $\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, con $t \in [1,2]$.

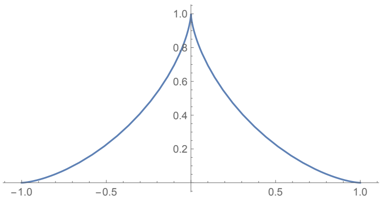
2. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

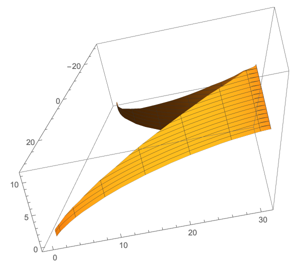
$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s, \text{ donde } \gamma \text{ es el contorno del cuadrado } |x|+|y| = a,\ a > 0$$

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s, \text{ donde } \gamma \text{ es el contorno del cuadrado de vértices } (0,0),(1,0),(1,1),(0,1).$$

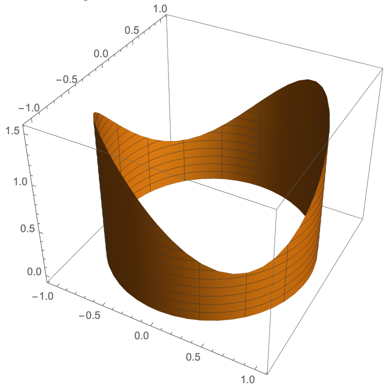
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2}, \text{ donde } \gamma \text{ es la primera vuelta de la hélice circular } (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, kt)$$

3. Calcular el área de la valla vertical levantada sobre la curva $\sigma : (30\cos^3 t, 30\,\mathrm{sen}^3\, t)$, con $t \in [0, \pi]$ de modo que la altura de la misma en cada punto es $z = 1 + y/3$. (Nota: calcular únicamente el área en el primer cuadrante ($t \in [0, \pi/2)$, y después multiplicar por 2)





4. Calcule el área de la parte del cilindro $x^2+y^2 = 1$ limitado por el plano xy y el paraboloide hiperbólico $z = xy + 1$.



5. Determinar la masa M del muelle que tiene forma de hélice de ecuación $\sigma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ si la densidad en los puntos (x, y, z) es $x^2 + y^2 + z^2$.

6. Obtener el centro de masas de un alambre enrollado en espiral $(e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Evaluar
$$\int_{\gamma_i} (x^2 - 2xy)\, \mathrm{d}x + (2xy + y^2)\, \mathrm{d}y$$
a lo largo de las siguientes trayectorias:

   (a) γ_1: el segmento que une los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (2, 4)$.

   (b) γ_2: el arco de parábola de eje OX que pasa por los puntos A y B.

   (c) γ_3: el arco de parábola de eje OY que pasa por los puntos A y B.

   (d) γ_4: la poligonal ACB, donde $C = (1, 4)$.

8. Evaluar
$$\int_{\gamma} 2yz^2\, \mathrm{d}x + xz^2\, \mathrm{d}y + 3xyz\, \mathrm{d}z,$$
donde γ es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \cap y = 0$, $x > 0$, $|z| <= a$.

9. Calcular
$$\int_{\gamma} F \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma} yz\, \mathrm{d}x + xz\, \mathrm{d}y + xy\, \mathrm{d}z,$$
donde γ es la parametrización $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(t) = (1, t, t^2)$. Calcular $\int_{\gamma^-} F \cdot \mathrm{d}s$.

10. Evaluar
$$\int_{\gamma} x^2\, \mathrm{d}x + xy\, \mathrm{d}y,$$
donde γ es la perímetro del cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1).

11. Sea $\mathbb{F} = (x, y, z)$. Evaluar la integral de $\mathbb{F}$ a lo largo de las trayectorias

    (a) $\gamma(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$

    (b) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, 1, \cos t)$, $t \in [0, \pi]$

    (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3, t)$, $t \in [0, 1]$

12. Considerar la fuerza $\mathbb{F} = (x, y, z)$. Hallar el trabajo realizado para trasladar una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

Integral de superficie

1. Sea $\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$ y D el disco unidad en el plano uv. Hallar el área de la *patata frita* $\Phi(D)$

2. Evaluar $\iint_S z\,\mathrm{d}s$ donde S es el hemisferio norte de la esfera centrada en el origen y radio $a > 0$.

3. Calcula el área de la porción de cilindro $x^2 + z^2 = 16$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

4. Evaluar $\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}s$ donde S es la esfera unidad.

5. Calcular $\iint_S z\ \mathrm{d}s$ donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$.

6. Evaluar $\iint_S z^2\ \mathrm{d}s$ donde S es la frontera del cubo $C = [-1,1]^3$.

7. Hallar la masa de la superficie $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ si en cada punto la densidad viene dada por $x^2 + y^2$, $a > 0$.

8. Hallar el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ en el primer octante.

9. Evaluar la integral de superficie $\iint_S x\ \mathrm{d}s$, donde S es el triángulo de vértices (0,0,1), (0,1,0) y (1,0,0).

10. Hallar el área lateral del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq h$.

11. Hallar el área del helicoide $\Phi(u,v) = (v\cos u, v \operatorname{sen} u, u)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,1]$.

12. Calcular las siguientes integrales de superficie $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$:

    $f = xy$ en el triángulo $x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$,
    $f = x^2 + y^2$ en el hemisferio superior de la esfera unidad
    $f = xyz$ en el casquete esférico superior delimitado por
    $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z^2 = x^2 + y^2$
    $f = x$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$

13. Evaluar la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ donde el campo vectorial $\mathbf{F} = (x,y,z)$ y S la superficie de la semiesfera superior de radio unidad $\Phi(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$, con $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, \pi/2]$.

14. Sea $S = [0,1]^2$ y $\mathbf{F} = (x, x^2, yz)$. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

15. Calcula $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$, donde

    - $\mathbf{F} = (18z, -12, 3y)$ y S es la región del plano $2x + 3y + 6z = 12$ situada en el primer octante.
    - $\mathbf{F} = (x^3, x^2y, x^2z)$ y S es la superficie cerrada que consta del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$, y sus tapas superior e inferior.

- $\mathbf{F} = (4xz, -y^2, yz)$ y S es la superficie que limita el cubo $[0,1]^3$.

16. Hallar el flujo de $\mathbf{F} = (0,0,1)$ a través del hemisferio norte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

17. Hallar el flujo de $\mathbf{F} = (x,y,z)$ a través del cilindro $x^2+y^2 = 1$, $0 \le z \le h$.

18. Si la temperatura está dada por la función $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y S es la esfera unidad orientada con la normal exterior, hallar el flujo de calor a través de la superficie S.

19. Sea S la superficie definida por las ecuaciones $z = 12$, $x^2+y^2 \le 25$. Si $\mathbf{F} = (x,y,z)$, hallar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

20. Sea S la superficie definida por las ecuaciones $z = 0$, $x^2+y^2 \le 1$. Si $\mathbf{F} = (x^2, 2xy + x, z)$, hallar el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de S.

Ecuaciones diferenciales

1. Hallar las isoclinas y esbozar las soluciones relativas a las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) $y' = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (b) $y' = y/x^2$.

   (c) $y' = y - x$.

   (d) $y' = y/x$.

   (e) $y' = -x/y$.

2. Hallar las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas:

1.- $y = Cx$,	2.- $y = Cx^2$,
3.- $Cx^2 + y^2 = 1$,	4.- $y = C\mathrm{e}^{-x}$,
5.- $y^2 = Cx^3$,	6.- $y = x/(1+Cx)$,
7.- $2x^2 + y^2 = 4Cx$,	8.- $y^3 + 3x^2y = C$,
9.- $y = C/(1+x^2)$,	10.- $4y + x^2 + 1 + C\mathrm{e}^{2y} = 0$,

3. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separadas

1.- $(1+x)\,\mathrm{d}x = x^2y^2\,\mathrm{d}y$,	2.- $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{3x+2y}\,\mathrm{d}x$,
3.- $(4y + yx^2)\,\mathrm{d}y - (2x + xy^2)\,\mathrm{d}x = 0$,	4.- $2y(1+x)\,\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$,
5.- $y \log x \,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{(y+1)^2}{x^2}$,	6-. $\mathrm{d}S = kS\mathrm{d}r$,
7.- $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(1-P)$,	8.- $\sec^2 x\,\mathrm{d}y + \mathrm{cosec} y\,\mathrm{d}x = 0$,
9.- $\mathrm{e}^y \mathrm{sen} x\,\mathrm{d}x + \cos x(\mathrm{e}^{2y} - y)\mathrm{d}y = 0$,	10.- $(\mathrm{e}^y+1)^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y = 0$,

11.- $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + N = N\mathrm{e}^{t+2}$,

12.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{sen}x\,(\cos 2y - \cos^2 y)$,

13.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy + 5x - y - 5}{xy - x - y + 1}$,

14.- $x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,

15.- $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x$,

16.- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1+2y^2}{y\,\operatorname{sen}x}$.

4. Resolver los problemas de valor inicial

   (a) $\operatorname{sen}x(\mathrm{e}^{-y} + 1)\,\mathrm{d}x = (1 + \cos x)\,\mathrm{d}y, \quad y(0) = 0.$

   (b) $y\,\mathrm{d}y = 4x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x, \qquad y(1) = 0.$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}4(x^2+1), \qquad x(\pi/4) = 1.$

   (d) $x^2y' = y - xy, \qquad y(-1) = -1.$

   (e) $(1+x^3)y' = x^2, \qquad y(1) = 2.$

   (f) $y' = \sqrt{y}, \qquad y(2) = 0.$

5. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$, sujeta a las condiciones iniciales a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$, c) $y(0) = 2$.

6. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1.- $y' = 4y$,

2.- $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 20y = 17$,

3.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{3x}$,

4.- $y' + 3x^2y = x^2$,

5.- $x^2y' + xy = 1$,

6.- $(x + 4y^2)\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}x = 0$,

7.- $x\,\mathrm{d}y = (x\cos x - y)\,\mathrm{d}x$,

8.- $(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^x y = 0$,

9.- $\cos x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\operatorname{sen}x = 1$,

10.- $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \mathrm{e}^x$,

11.- $x^2y' + x(x+2)y = \mathrm{e}^x$,

12.- $y\,\mathrm{d}x + (xy + 2x - y\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$,

13.- $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (3x+1)y = \mathrm{e}^{-3x}$,

14.- $y\,\mathrm{d}x - 4(x + y^6)\,\mathrm{d}y = 0$.

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Hallar la curva que pasa por el punto $(0, -2)$ y tal que la pendiente de la tangente en cada punto de la misma es igual a la ordenada de dicho punto más tres unidades.

2. En un cultivo de bacterias, la velocidad de crecimiento es proporcional al número presente en cada momento.

   (a) Si se sabe que el número se duplica en 4 horas, calcular el número de bacterias al cabo de 12 horas.

   (b) Si hay 10^4 bacterias al cabo de 3 horas y 4×10^4 al cabo de 5 horas, hallar el número de bacterias en el instante inicial.

3. Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a la que se enfría una sustancia en un medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio. Si la temperatura del medio es de 30^o y la sustancia se enfría de 100^o a 70^o en 15 minutos:

   (a) Calcular el instante de tiempo en el que la temperatura de la sustancia es 40^o.

   (b) Calcular la temperatura de la sustancia al cabo de 2 horas.

4. Un paracaidista cae con una velocidad de 53.65 m/sg cuando su paracaídas se abre. Si la resistencia del aire es $pv^2/256$ donde p es el peso total del hombre y del paracaídas, hallar su velocidad como una función del tiempo t despúes de abierto el paracaídas.

5. En un trozo de madera quemada se encontró que el 85.5% de carbono–14 se había desintegrado. Determinar la edad aproximada de la madera. (La semivida del carbono-14 es de 5600 años).

6. La altura h del nivel de agua que fluye por un orificio situado en el fondo de un depósito cilíndrico se expresa por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}$$

   donde $g = 32$ pies/sg^2 (gravedad) y A_1 y A_2 son las áreas transversales del depósito y del orificio respectivamente. Si al empezar a contar el tiempo la altura del depósito es de 20 pies, hallar el instante de tiempo en el que queda vacío. ($A_1 = 50$ pies^2 y $A_2 = 0.25$ pies^2).

7. Un tanque de 1000 litros está lleno de salmuera que contiene 60 kilos de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 20 litros por minuto y la mezcla, conservada uniformemente por agitación, sale a la misma velocidad. Hallar la sal que queda en el tanque después de una hora.

8. Se está formando una sustancia C por la reacción de dos sustancias A y B, de forma que a gramos de A y b gramos de B forman $a + b$ gramos de C. Si inicialmente hay x_0 gramos de A, y_0 gramos de B y ninguno de C, y si la velocidad de formación de C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no se han combinado, expresar la cantidad, z gramos, de C formada en función del tiempo t.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

1. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 2\lambda\, y' + \omega^2 y = 0, \quad \lambda > 0,$$

estudiar el comportamiento de la solución en función de las raíces de la ecuación característica.

2. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} y'' + \omega^2 y = F_0 \mathrm{sen}(\gamma t),\ F_0 \text{ constante}, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}$$

cuando $\gamma \neq \omega$ y cuando $\gamma = \omega$. En cada caso, hallar $\lim_{t\to\infty} |y(t)|$.

3. Una curva integral $y = u(x)$ de la ecuación diferencial $y'' - 3y' - 4y = 0$ corta a una curva integral $y = v(x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y' - 5y = 0$ en el origen. Determinar las funciones u y v si las dos curvas tienen la misma pendiente en el origen y si

$$\begin{array}{c} \lim \\ t \to \infty \end{array} \frac{v^4(x)}{u(x)} = 5/6.$$

4. Sabiendo que la ecuación diferencial $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y_1(x) = u(x)$ e $y_2(x) = xu(x)$, donde $u(0) = 1$, determinar $u(x)$ y $Q(x)$ en función de x.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{gathered} y'' - 2y' + y = \exp^x/(1 + x^2), \\ y'' + 2y' + y = \exp^{-x} \log x, \\ 4y'' - 4y' + y = 8\exp^{-x} + x, \\ y'' + 2y' - 8y = 2\exp^{-2x} - \exp^{-x}, \\ 4y'' + 16y = \cos(2t), \\ y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \\ 4y'' + 36y = \mathrm{cosec}(3t), \\ y'' + y = \mathrm{sen} x - \cos x \end{gathered}$$