Hojas de problemas de interpolación y cuadratura numérica.

Ampliación de Matemáticas.

1.- El polinomio $p_3(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola a los primeros cuatro datos de la tabla

x_i	$-1.$	0	$1.$	$2.$	$3.$
$f(x_i)$	$2.$	$1.$	$2.$	$-7.$	$10.$

Añadir un término más a $p_3(x)$ de manera que el polinomio resultante interpola a la tabla entera.

2.- Encontrar las fórmulas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para los siguientes datos:

x_i	-2	0	$1.$
$f(x_i)$	0	$1.$	$-1.$

Escribir ambos en la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ para ver que son idénticos.

3.- Demostrar que en el problema de interpolación de Lagrange se verifican las siguientes propiedades:

i) Los polinomios de la base de Lagrange verifican

$$\sum_{k=0}^{n} L_{n\,k}(x) = 1.$$

ii) Si $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (distintos), entonces, el error puede escribirse como:

$$error = f(x) - p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f(x_k)\right) L_{n\,k}(x).$$

4.- Hallar el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 a la función $f(x) = \cos(x)$ en los puntos $x = 0, 1/2, 1$. Calcular el error de interpolación y dar una cota del error cometido en $x = 3/4$.

5.- Sea la tabla de datos

x_i	0	$.2$	$.4$	$.6$
$f(x_i)$	$1.$	1.2214	1.4918	1.8221

correspondientes a la función $f(x) = \mathrm{e}^x$.

i) Para la interpolación lineal en $x = 1/3$ que intervalo tomarías. Da una cota del error absoluto y compara con el resultado exacto.

ii) Calcula el polinomio de interpolación de grado ≤ 3, dando una cota del error cometido y comparando con el resultado exacto.

iii) Aproxima el valor de $\mathrm{e}^{4/5}$ con el polinomio de interpolación cúbico hallando el error. Razona a que es debido que el error anterior sea tan grande comparado con el obtenido en ii).

6.- Considerar la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq b_0 f(a) + b_1 f(\frac{a+b}{2}).$$

i) Hallar b_0 y b_1 para que tenga grado de precisión máximo.

ii) Desarrollar el error por Taylor.

7.- Determinar una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq b_0 \left(f(a) + f(\frac{a+b}{2}) \right).$$

con grado de precisión 2.

8.- Aproximar la integral $\int_0^2 \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$ por las fórmulas del trapecio, punto medio y Simpson, calculando el error cometido. Desarrolla un procedimiento por el que usando las mismas fórmulas logres mejor aproximación.

9.- Considerar la función $f(x) = |x|$. Hallar el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 que la interpola en los puntos $-1, 0, 1$. Integrarlo para aproximar $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$. Hallar el error cometido. Desarrolla un procedimiento por el que calcules exactamente la integral anterior.

Hojas de problemas Ecuaciones Diferenciales.

Ampliación de Matemáticas.

1.- Hallar las isoclinas y esbozar las soluciones relativas a las siguientes ecuaciones diferenciales

1.- $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.- $y' = y/x^2$.

3.- $y' = y - x$.

4.- $y' = y/x$.

5.- $y' = -x/y$.

2.- Hallar las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas:

1.- $y = Cx$,

2.- $y = Cx^2$,

3.- $Cx^2 + y^2 = 1$,

4.- $y = Ce^{-x}$,

5.- $y^2 = Cx^3$,

6.- $y = x/(1 + Cx)$,

7.- $2x^2 + y^2 = 4Cx$,

8.- $y^3 + 3x^2y = C$,

9.- $y = C/(1 + x^2)$,

10.- $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$,

3.- Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separadas

1.- $(1 + x)\,\mathrm{d}x = x^2y^2\,\mathrm{d}y$,

2.- $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{3x+2y}\,\mathrm{d}x$,

3.- $(4y + yx^2)\,\mathrm{d}y - (2x + xy^2)\,\mathrm{d}x = 0$,

4.- $2y(1 + x)\,\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$,

5.- $y \log x \,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{(y + 1)^2}{x^2}$,

6-. $\mathrm{d}S = kS\mathrm{d}r$,

7.- $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(1 - P)$,

8.- $\operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}y + \operatorname{sen} y\,\mathrm{d}x = 0$,

9.- $\mathrm{e}^y \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \cos x(\mathrm{e}^{2y} - y)\mathrm{d}y = 0$,

10.- $(\mathrm{e}^y + 1)^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + 1)^3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y = 0$,

11.- $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + N = N\mathrm{e}^{t+2}$,

12.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{sen} x\,(\cos 2y - \cos^2 y)$,

13.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy + 5x - y - 5}{xy - x - y + 1}$,

14.- $x\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,

15.- $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x$,

16.- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1 + 2y^2}{y\,\operatorname{sen} x}$.

4.- Resolver los problemas de valor inicial

1.- $\operatorname{sen} x(\mathrm{e}^{-y} + 1)\,\mathrm{d}x = (1 + \cos x)\,\mathrm{d}y, \quad y(0) = 0$.

2.- $y\,\mathrm{d}y = 4x\sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}x, \qquad y(1) = 0$.

3.- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}4(x^2 + 1), \qquad x(\pi/4) = 1$.

4.- $x^2y' = y - xy, \qquad y(-1) = -1.$

5.- $(1 + x^3)y' = x^2, \qquad y(1) = 2.$

6.- $y' = \sqrt{y}, \qquad y(2) = 0.$

5.- Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$, sujeta a las condiciones iniciales a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$, c) $y(0) = 2$.

6.- Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1.- $y' = 4y$,

2.- $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 20y = 17$,

3.- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{3x}$,

4.- $y' + 3x^2y = x^2$,

5.- $x^2y' + xy = 1$,

6.- $(x + 4y^2)\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}x = 0$,

7.- $x\,\mathrm{d}y = (x\cos x - y)\,\mathrm{d}x$,

8.- $(1 + x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^x y = 0$,

9.- $\cos x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\,\mathrm{sen}\,x = 1$,

10.- $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \mathrm{e}^x$,

11.- $x^2y' + x(x + 2)y = \mathrm{e}^x$,

12.- $y\,\mathrm{d}x + (xy + 2x - y\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$,

13.- $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (3x + 1)y = \mathrm{e}^{-3x}$,

14.- $y\,\mathrm{d}x - 4(x + y^6)\,\mathrm{d}y = 0$.

7.- Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1.- $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, Newton (año 1671).

2.- $y' = 1 + y + xy + x^2y + x^3y$, Newton (año 1671).

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

1.- Hallar la curva que pasa por el punto $(0, -2)$ y tal que la pendiente de la tangente en cada punto de la misma es igual a la ordenada de dicho punto más tres unidades.

2.- En un cultivo de bacterias, la velocidad de crecimiento es proporcional al número presente en cada momento.

a) Si se sabe que el número se duplica en 4 horas, calcular el número de bacterias al cabo de 12 horas.

b) Si hay 10^4 bacterias al cabo de 3 horas y 4×10^4 al cabo de 5 horas, hallar el número de bacterias en el instante inicial.

3.- Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a la que se enfría una sustancia en un medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio. Si la temperatura del medio es de 30^o y la sustancia se enfría de 100^o a 70^o en 15 minutos:

a) Calcular el instante de tiempo en el que la temperatura de la sustancia es 40^o.

b) Calcular la temperatura de la sustancia al cabo de 2 horas.

4.- Un paracaidista cae con una velocidad de 53.65 m/sg cuando su paracaídas se abre. Si la resistencia del aire es $pv^2/256$ donde p es el peso total del hombre y del paracaídas, hallar su velocidad como una función del tiempo t despúes de abierto el paracaídas.

5.- En un trozo de madera quemada se encontró que el 85.5% de carbono–14 se había desintegrado. Determinar la edad aproximada de la madera. (La semivida del carbono-14 es de 5600 años).

6.- La altura h del nivel de agua que fluye por un orificio situado en el fondo de un depósito cilíndrico se expresa por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}$$

donde $g = 32$ pies/sg^2 (gravedad) y A_1 y A_2 son las áreas transversales del depósito y del orificio respectivamente. Si al empezar a contar el tiempo la altura del depósito es de 20 pies, hallar el instante de tiempo en el que queda vacío. ($A_1 = 50$ pies^2 y $A_2 = 0.25$ pies^2).

7.- Un tanque de 1000 litros está lleno de salmuera que contiene 60 kilos de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 20 litros por minuto y la mezcla, conservada uniformemente por agitación, sale a la misma velocidad. Hallar la sal que queda en el tanque después de una hora.

8.- Se está formando una sustancia C por la reacción de dos sustancias A y B, de forma que a gramos de A y b gramos de B forman $a+b$ gramos de C. Si inicialmente hay x_0 gramos de A, y_0 gramos de B y ninguno de C, y si la velocidad de formación de C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no se han combinado, expresar la cantidad, z gramos, de C formada en función del tiempo t.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

1.- Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 2\lambda\, y' + \omega^2 y = 0, \quad \lambda > 0,$$

estudiar el comportamiento de la solución en función de las raíces de la ecuación característica.

2.- Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} & y'' + \omega^2 y = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t), \ F_0 \text{ constante}, \\ & y(0) = y'(0) = 0, \end{aligned}$$

cuando $\gamma \neq \omega$ y cuando $\gamma = \omega$. En cada caso, hallar $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)|$.

3.- Una curva integral $y = u(x)$ de la ecuación diferencial $y'' - 3y' - 4y = 0$ corta a una curva integral $y = v(x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y' - 5y = 0$ en el origen. Determinar las funciones u y v si las dos curvas tienen la misma pendiente en el origen y si

$$\lim_{t \to \infty} \frac{v^4(x)}{u(x)} = 5/6.$$

4.- Sabiendo que la ecuación diferencial $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y_1(x) = u(x)$ e $y_2(x) = xu(x)$, donde $u(0) = 1$, determinar $u(x)$ y $Q(x)$ en función de x.

5.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x/(1+x^2),$$
$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}\log x,$$
$$4y'' - 4y' + y = 8\,\mathrm{e}^{-x} + x,$$
$$y'' + 2y' - 8y = 2\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x},$$
$$4y'' + 16y = \cos(2t),$$
$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2,$$
$$4y'' + 36y = \operatorname{sen}(3t),$$
$$y'' + y = \operatorname{sen} x - \cos x$$

.

6.- Hallar la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3\,\mathrm{e}^{2x}, \quad x > 0,$$

sabiendo que la ecuación homogénea tiene una solución de la forma $y(x) = \mathrm{e}^{mx}$.

7.- Hallar la solución general de la ecuación

$$4x^2y'' + 4xy' - y = 0, \quad x > 0.$$

8.- Hallar la solución general de

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2, \quad x > 1,$$

sabiendo que la ecuación homogénea tiene una solución de la forma $y = x^m$.